Jeden (ne úplně tradiční) pohled na Lambertovu W funkci

Luděk Nechvátal

Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství,
Vysoké učení technické v Brně

PANM 22, Hejnice, 23.–28. června 2024

- *Lambertova W funkce* je definována jako inverzní relace k funkci

$$z = f(w) = w\exp(w), \quad w \in \mathbb{C}$$

(f není prostá na $\mathbb{C}$). Přesněji, existuje spočetně mnoho větví W_k, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž platí: jestliže z, w jsou daná komplexní čísla, pak

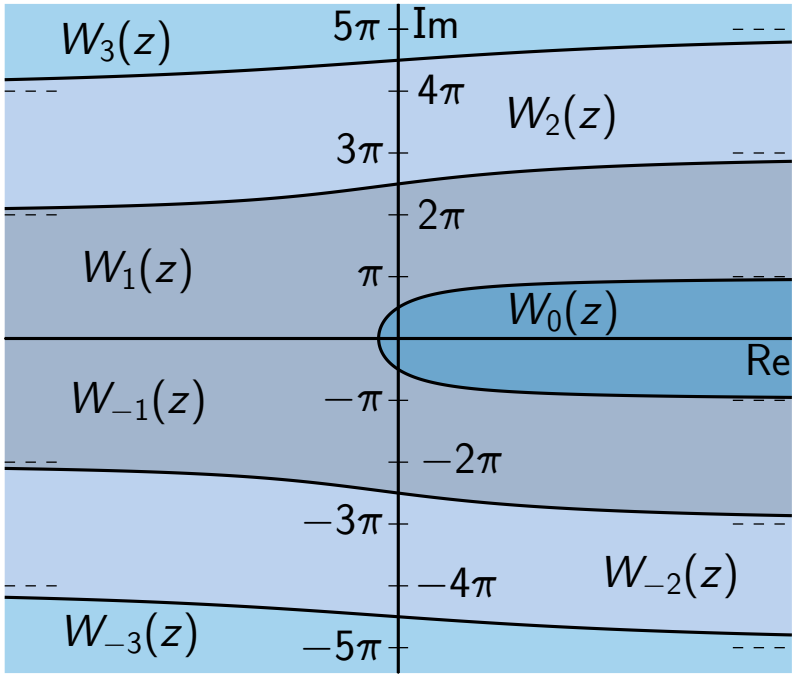
$$z = w\exp(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w = W_k(z) \quad \text{pro nějaké } k \in \mathbb{Z}.$$

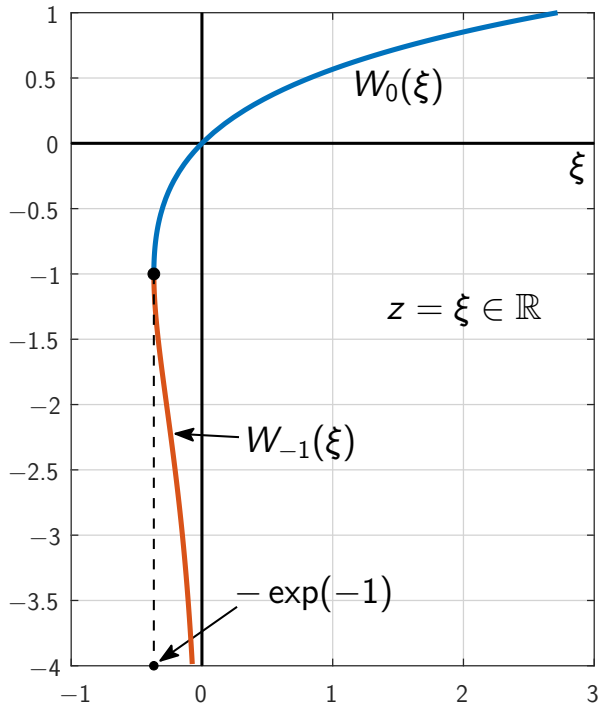
- Větev W_0 se nazývá *hlavní větev*.
- Větve jsou zavedeny tak, abychom měli konzistentnost s komplexním logaritmem

$$\log_k(z) = \underbrace{\ln(|z|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)}_{\mathrm{Log}(z)} + \mathrm{i}\,2k\pi, \quad z \neq 0, \quad -\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$$

(periodičnost podél imaginární osy je důsledkem $\exp(w) = \exp(w + \mathrm{i}\,2k\pi)$). Záporná reálná poloosa $\mathbb{R}^-$ představuje „branch cut“ a platí

$$\log_k(\mathbb{R}^-) = \{w \in \mathbb{C} : w = x + \mathrm{i}(1+2k)\pi,\ x \in \mathbb{R}\}.$$





- Jaké křivky oddělují obory hodnot větví? Je-li $w = x + \mathrm{i}y$ a $z = \xi + \mathrm{i}\eta$, pak rovnice $f(w) = w\exp(w) = z$ přejde na tvar

$$(x + \mathrm{i}y)\exp(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)\exp(x)(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) = \xi + \mathrm{i}\eta$$

a porovnáním reálných (resp. imaginárních) částí máme

$$\xi = \exp(x)(x\cos(y) - y\sin(y)),$$
$$\eta = \exp(x)(x\sin(y) + y\cos(y)).$$

Vezměme „branch cut“ stejně jako u funkce log, tj. dívejme se na obrazy záporné reálné poloosy. Tedy když $\eta = 0$, pak $y = 0$ nebo $x = -y \operatorname{cotg}(y)$. Pokud navíc $x \cos(y) - y \sin(y) < 0$, pak funkce f skutečně zobrazuje křivky do záporné reálné z-osy. Shrnuto, křivka, která separuje W_0 od $W_{\pm 1}$ je

$$\{-y \operatorname{cotg}(y) + \mathrm{i}\, y : -\pi < y < \pi\},$$

W_1 od W_{-1} pak část reálné osy $\xi \leq -1$, zbývající větve

$$\{-y \operatorname{cotg}(y) + \mathrm{i}\, y : 2k\pi < \pm y < (2k+1)\pi\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Žádnou větev nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí v uzavřeném tvaru, ale jsou známy různé nekonečné rozvoje.
- Většina podstatných vlastností v [Corless *et al.*, 1996], viz také [Mező, 2022].

- [Lambert, 1758]

$$x^m + px = q, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

(Reálné) řešení ve tvaru řady:

$$x = \frac{q}{p} - \frac{q^m}{p^{m+1}} + m\frac{q^{2m-1}}{p^{2m+1}} - m\frac{3m-1}{2}\frac{q^{3m-2}}{p^{3m+1}} + \cdots.$$

Unde limites radicis

$x < q : p$

$x > q : p - q^2 : p^3$

$x < q : p - q^2 : p^3 + 2q^3 : p^5 - q^4 : p^7$

$x > q : p - q^2 : p^3 + 2q^3 : p^5 - 5q^4 : p^7 + 6q^5 : p^9 - 6q^6 : p^{11}$
$+ 4q^7 : p^{13} - q^8 : p^{15}$

&c.

- Lambert se k úloze vrátil v roce 1770 a odvodil také mocniny řešení ve tvaru řady.

- [Euler, 1779] Vyšel z rovnice $x = x^m + q$ a transformoval ji ($x \mapsto x^{-\beta}$, $m = \alpha/\beta$, $q = (\alpha - \beta)v$) na

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha+\beta}$$

Řešení a jeho mocniny ve tvaru řady:

$$x^n = 1 + nv + \frac{1}{2} n(n+\alpha+\beta)v^2 + \frac{1}{6} n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 + \frac{1}{24} n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 + \cdots$$

- Poté se zabýval otázkou, co se stane při $\alpha = \beta$, přesněji

$$\frac{x^\alpha - x^\beta}{\alpha - \beta} = v x^{\alpha+\beta} \quad \xrightarrow{\beta \to \alpha} \quad x^\alpha \ln(x) = v x^{2\alpha} \;\Rightarrow\; \ln(x) = v x^\alpha \;\Rightarrow\; \ln(x^\alpha) = \alpha v x^\alpha$$

Substituce $y = x^\alpha$ a $u = \alpha v$ dávají

$$\ln(y) = uy \;\Rightarrow\; y = \exp(uy) \;\Rightarrow\; y \exp(-uy) = 1 \;\Rightarrow\; w \exp(w) = z\big|_{w=-uy,\ z=-u}$$

Hoc cognomine appellare liceat illam maxime memorabilem feriem, qua vir acutiffimi ingenii *Lambertus* radices aequationum trinomialium primus exprimere docuit in Actorum Heluetieorum Volum. III. Haec autem feries, fi eius elementa parumper immutentur, fequenti forma repraefentari poteft:

$$S = 1 + nv + \tfrac{1}{2} n(n+\alpha+\beta)v^2 + \tfrac{1}{6} n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 + \tfrac{1}{24} n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 + \text{etc.}$$

cuius feriei fumma S ita pendet a refolutione huius aequationis trinomialis:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)\, v\, x^{\alpha+\beta}, \text{ vt fit } S = x^n$$

- Dva názory, proč ne Eulerova, ale Lambertova funkce: 1) Euler si Lambertových výsledků vážil. 2) není nikterak užitečné mít další funkci pojmenovanou po Eulerovi.
- Proč W? 1) Jeden z pionýrských článku o transcendentní rovnici $w\exp(w) = z$ skutečně značí proměnnou w [Fritsch, Schafer & Crowley, 1973], implementace v Maple (G. H. Gonnet), velká písmena funkcí (W); 2) symbol je vhodný i jako pocta E. M. Wrightovi (odvodil nejednu vlastnost Lambertovy funkce).

- Pomocí W lze snadno řešit rovnice typu $xe^x = a$, $xb^x = a$, $x^{x^a} = b$, $a^x = x + b$ aj.
- Základní (testovací) zpožděná ODR

$$x'(t) = \lambda x(t-\tau), \qquad \tau \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{†}$$

Řešení hledáme ve tvaru $x(t) = \exp(st)$. Dosazením do rovnice máme

$$s\exp(st) = \lambda \exp(s(t-\tau)) = \lambda \exp(st)\exp(-s\tau) \quad / : \exp(st)$$

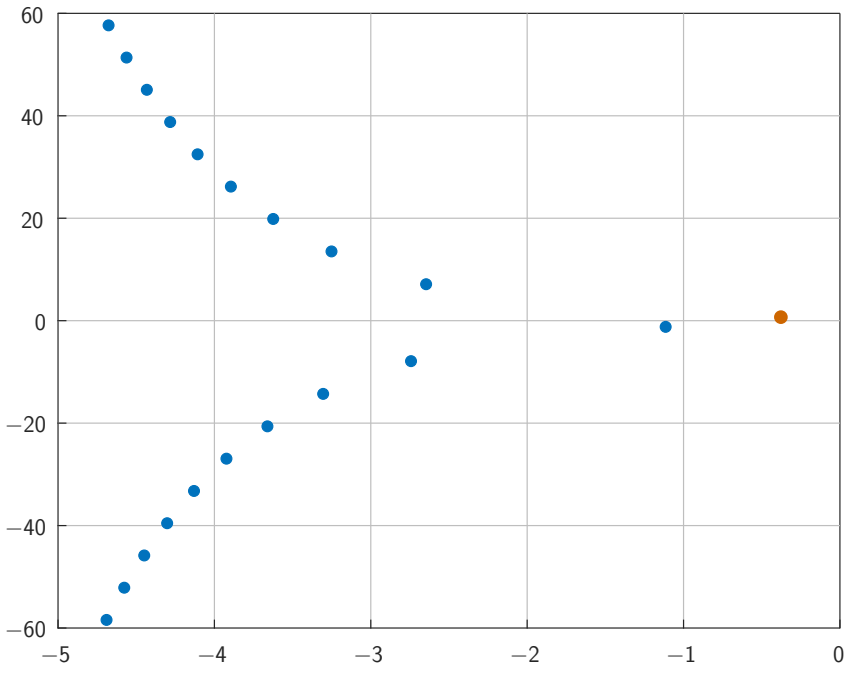
- Charakteristická rovnice

$$s - \lambda\exp(-s\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = \lambda\exp(-s\tau) \quad \Leftrightarrow \quad \tau s \exp(s\tau) = \tau\lambda$$

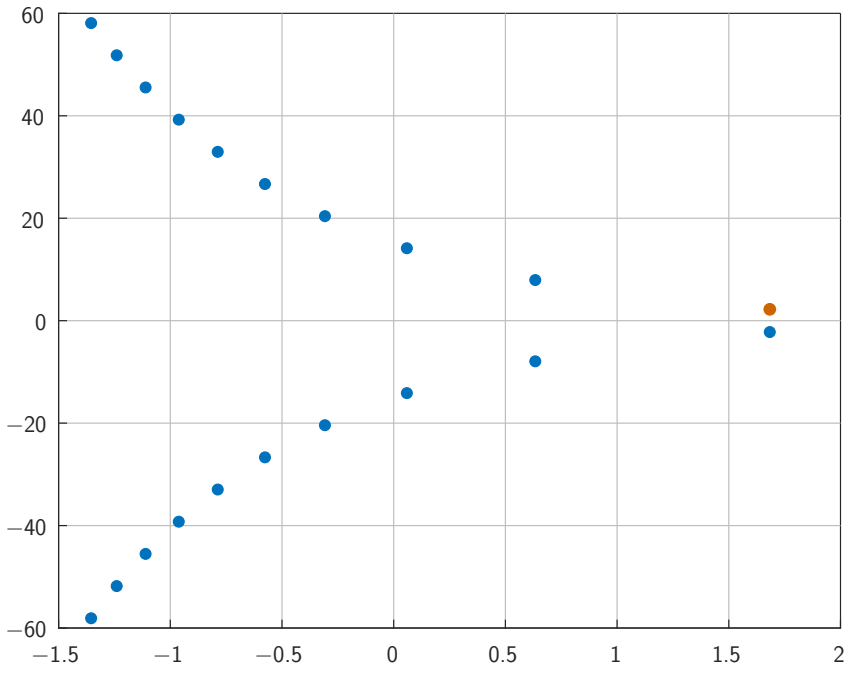
Poslední rovnice má nekonečně mnoho řešení

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(\lambda\tau), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(s_k t).$$

- Otázka stability: Rovnice je AS $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(s_k) < 0$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.



$W_k(-0.5+0.2\mathrm{i})$, $k \in \mathbb{Z}$



$W_k(-15)$, $k \in \mathbb{Z}$

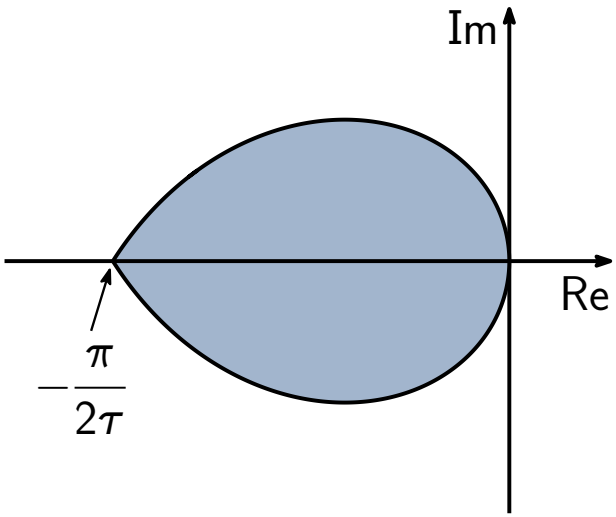
- [Shinozaki & Mori, 2006] $\mathrm{Re}(W_k(z)) \leq \mathrm{Re}(W_0(z))$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (také [Nishiguchi, 2016]). Z hlediska stability tedy stačí lokalizovat s_0.
- Symetrie:

$$W_k(\overline{z}) = \overline{W_{-k}(z)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall z \in \mathbb{C} \text{ mimo „branch cut“};$$

$$W_k(z) = \overline{W_{-(k+1)}(z)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall z \in \mathbb{R},\ z < -1/\mathrm{e}\,.$$

- Rovnice (†) je AS $\iff$

$$|\lambda| < \frac{|\operatorname{Arg}(\lambda)| - \pi/2}{\tau}.$$



- Standardně se dokazuje metodou D-dekompozice (boundary locus). Myšlenkou je dosadit

$$s = \mathrm{i}\,\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}_0^+$$

do charakteristické rovnice $s - \lambda \exp(-s\tau) = 0$, tím odhalíme hranici oblasti stability v λ-rovině.

- Druhou možností je metoda Laplaceovy transformace (věta o konečné hodnotě).
- Jako alternativa se nabízí Lambertova W funkce, je však potřeba „rozklíčovat“ podmínku

$$s_0 = \frac{1}{\tau} W_0(\lambda\tau) < 0.$$

Tvrzení ([ČKN, 2023])

Nechť $p, q \in \mathbb{R}$, $p > -1$, $0 < q < \pi$ *a* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Pak*

- $\mathrm{Re}(W_0(z)) < p \iff$ *buď* $|z| < p\exp(p)$, *nebo*

$$|z| \geq |p|\exp(p) \quad a \quad \arccos\left(\frac{p\exp(p)}{|z|}\right) + \frac{\sqrt{|z|^2 - p^2\exp(2p)}}{\exp(p)} < |\mathrm{Arg}(z)|;$$

- $|\mathrm{Im}(W_0(z))| > q \iff$

$$|\mathrm{Arg}(z)| > q \quad a \quad \frac{q}{\sin(|\mathrm{Arg}(z)| - q)}\exp\big(q\,\mathrm{cotg}(|\mathrm{Arg}(z)| - q)\big) < |z|.$$

- Klíčový krok důkazu: Pokud $x_k := \mathrm{Re}(W_k(z))$, $y_k := \mathrm{Im}(W_k(z))$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak (x_k, y_k) řeší soustavu

$$\begin{aligned} x\exp(x) &= |z|\cos(\mathrm{Arg}(z) - y), \\ y\exp(x) &= |z|\sin(\mathrm{Arg}(z) - y)\,. \end{aligned}$$

- Alternativní podmínka k „arccos“ v 1. větvi odvozena dříve v [Nishiguchi, 2016].

- Již víme, že $s_0 = W_0(\lambda\tau)/\tau$ a (†) je AS, právě když $\mathrm{Re}(s_0) < 0$. Stačí tedy položit $z = \tau\lambda$ a $p = 0$ v podmínce

$$\arccos\left(\frac{p\exp(p)}{|z|}\right) + \frac{\sqrt{|z|^2 - p^2\exp(2p)}}{\exp(p)} < |\mathrm{Arg}(z)|,$$

čímž ihned dostaneme

$$\frac{\pi}{2} + \tau|\lambda| < |\,\mathrm{Arg}(\tau\lambda)| = |\,\mathrm{Arg}(\lambda)|, \quad \text{tj.} \quad |\lambda| < \frac{|\,\mathrm{Arg}(\lambda)| - \pi/2}{\tau}.$$

- Otázka stability/asymptotiky rovnice

$$({}_cD^\alpha x)(t) = \lambda x(t-\tau), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha > 0,\ \tau \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad (\spadesuit)$$

(poprvé studována v [Chen & Moore, 2002]),

$$({}_cD^\alpha g)(t) := (I^{m-\alpha} g^{(m)})(t)\,\mathrm{d}s, \quad m \in \mathbb{N} : m-1 < \alpha \leq m,$$

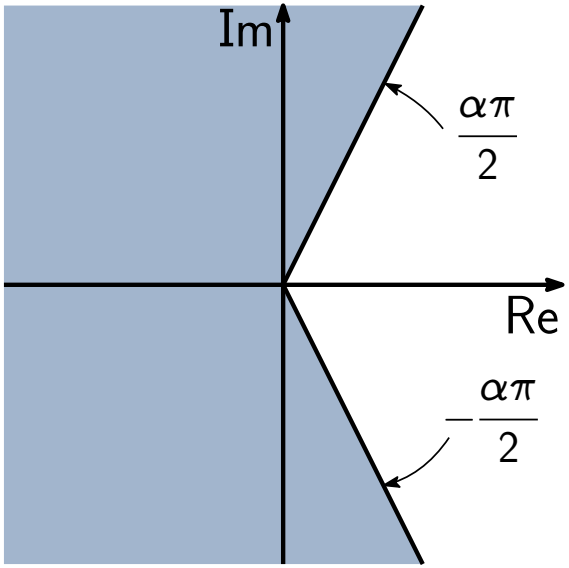
je *Caputova zlomková derivace funkce g (řádu $\alpha > 0$)* [Diethelm, 2010], I^β je zlomkový integrální operátor řádu $\beta > 0$ definovaný

$$(I^\beta h)(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ a funkci h integrovatelnou na $\langle 0, T\rangle$ platí

$$(I^n h)(t) = (\underbrace{I^1 I^1 \dots I^1}_{n\times} h)(t), \quad \forall t \in \langle 0, T\rangle.$$

- Nezpožděný případ: (♠) je pro $\tau = 0$ AS $\iff |\mathrm{Arg}(\lambda)| > \dfrac{\alpha\pi}{2}$.



- Laplaceův obraz rovnice

$$s^\alpha \mathscr{L}\{x\}(s) - \sum_{j=1}^{m} s^{\alpha-j} x^{(j-1)}(0) = \lambda \mathscr{L}\{x\}(s),$$

$$\mathscr{L}\{x\}(s) = \sum_{j=1}^{m} x^{(j-1)}(0) \frac{s^{\alpha-j}}{s^\alpha - \lambda}.$$

- (Dvouparametrická) Mittag-Lefflerova funkce

$$E_{\mu,\nu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu j + \nu)}, \quad \mu, \nu > 0$$

$$\mathscr{L}\{t^{\nu-1} E_{\mu,\nu}(\lambda t^\mu)\}(s) = \frac{s^{\mu-\nu}}{s^\mu - \lambda}.$$

- Obecné řešení rovnice (♠)

$$x(t) = c_1 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + c_2 t E_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha) + \cdots + c_m t^{m-1} E_{\alpha,m}(\lambda t^\alpha), \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

- [Podlubný, 1998] Nechť $0 < \mu < 2$, $\nu \in \mathbb{R}$ a $\mu\pi/2 < r < \min\{\pi, \mu\pi\}$. Pak pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ platí

$$E_{\mu,\nu}(z) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\nu - \mu k)} + \mathcal{O}(|z|^{-1-n}) \quad \text{pro } |z| \to \infty, \quad r \le |\mathrm{Arg}(z)| \le \pi,$$

  pro $|\mathrm{Arg}(z)| \le r$ je napravo navíc člen $z^{(1-\beta)/\beta} \exp(z^{1/\alpha})/\alpha$.
- Důsledek: V oblasti stability (tj. pro $|\mathrm{Arg}(\lambda)| > \alpha\pi/2$) platí pro každé řešení x rovnice (♠) (při $\tau = 0$)

$$x(t) = \mathcal{O}(t^{-\alpha}) \quad \text{pro} \quad t \to \infty \quad \text{a} \quad 0 < \alpha < 1;$$
$$x(t) = \mathcal{O}(t^{1-\alpha}) \quad \text{pro} \quad t \to \infty \quad \text{a} \quad 1 < \alpha < 2.$$

  Mimo uzávěr této oblasti je rovnice nestabilní a rychlost růstu řešení je exponenciální; na hranici jsou pak řešení ohraničená (rovnice je S, ale nikoliv AS).

- Oblast stability lze také získat z charakteristické rovnice $s^\alpha - \lambda = 0$ vzhledem k levé komplexní polorovině ($\mathrm{Re}(s) < 0$):

$$s^\alpha = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad |s|^\alpha \exp(\mathrm{i}\,\alpha\,\mathrm{Arg}(s)) = |\lambda| \exp(\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(\lambda)) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arg}(s) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Arg}(\lambda).$$

V tomto směru se nabízí věta o konečné hodnotě Laplaceovy transformace, ale pozor!

Věta o konečné hodnotě

Nechť $\mathscr{L}\{f\}$ nemá žádné singulární body v uzavřené pravé komplexní polorovině s případnou výjimkou jednoduchého pólu v počátku. Pak existuje $\lim_{t\to\infty} f(t)$ a platí

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s).$$

Laplaceův obraz rovnice (♠) nesplňuje předpoklady věty, je tedy potřeba dodatečný argument („iracionální“ verze věty, vlastnost Wienerova–Tauberova typu aj.).

- „Úplný“ případ (zlomkový i zpožděný): Charakteristická rovnice má nyní tvar

$$s^\alpha - \lambda \exp(-\tau s) = 0$$

a opět se zajímáme, jakou podmínku musí splňovat λ, aby všechny charakteristické kořeny s_k ležely v otevřené levé komplexní polorovině. Úpravou rovnice máme

$$s^\alpha \exp(\tau s) = \lambda \quad \xrightarrow{!!} \quad s \exp\left(\frac{\tau}{\alpha} s\right) = \lambda^{1/\alpha} \quad \longrightarrow \quad \frac{\tau}{\alpha} s \exp\left(\frac{\tau}{\alpha} s\right) = \frac{\tau}{\alpha} \lambda^{1/\alpha}.$$

- Pozor, v případě komplexní mocninné funkce obecně neplatí

$$(z^a)^b = z^{ab}.$$

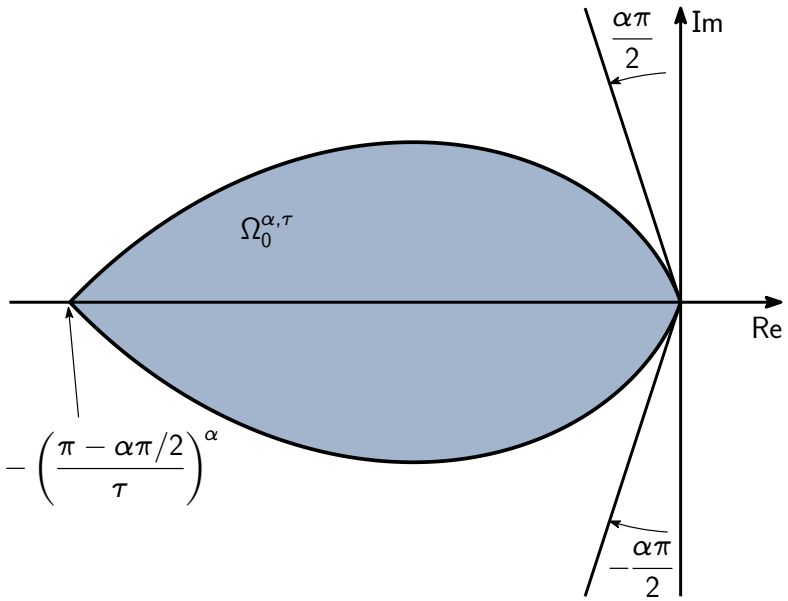
Výše uvedená úprava je korektní, pokud $|\mathrm{Arg}(\lambda)| \leq \alpha\pi$. Tato nerovnost je splněna triviálně, když $\alpha > 1$.

- Pro $\alpha > 1$ tedy můžeme kořeny s_k charakteristické rovnice psát ve tvaru

$$s_k = \frac{\alpha}{\tau} W_k\left(\frac{\tau}{\alpha}\lambda^{1/\alpha}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

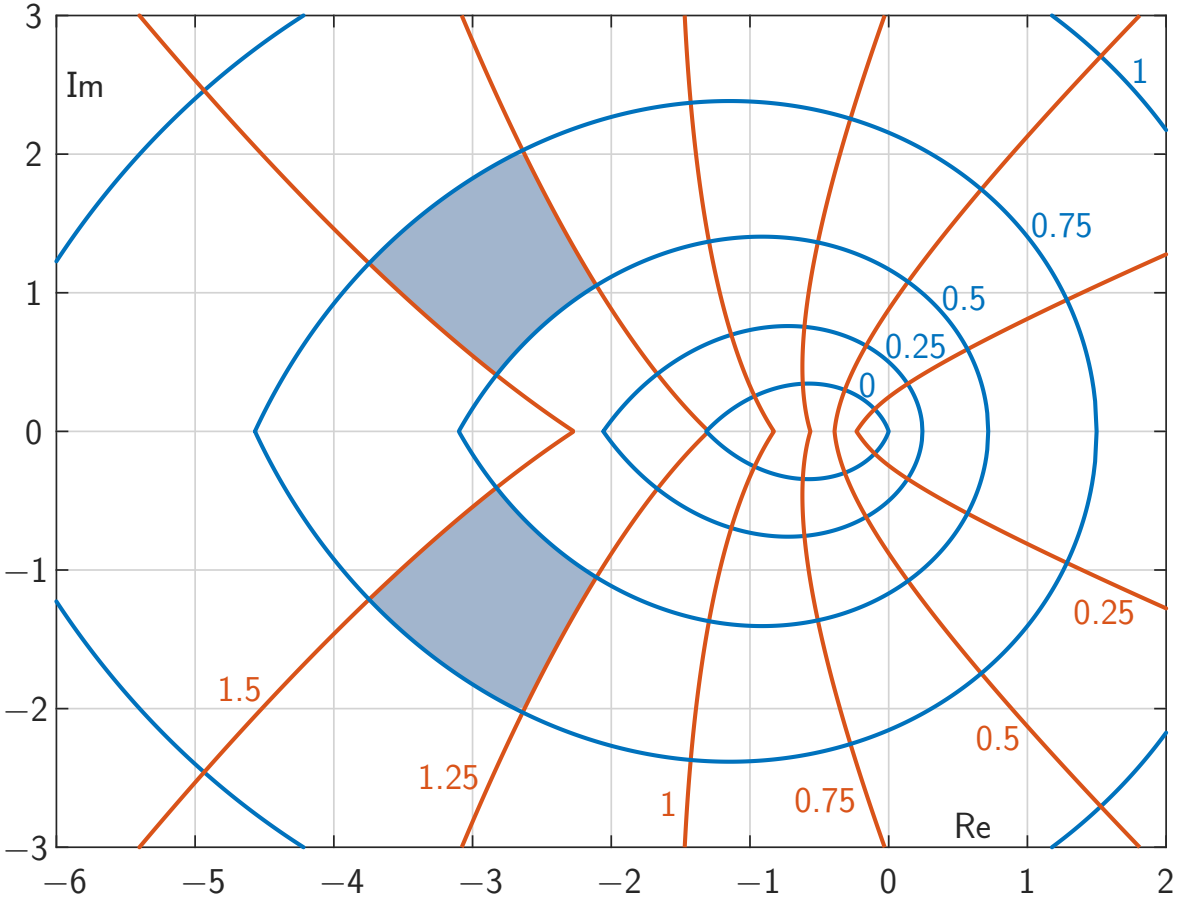
- Pro $p = 0$ a $z = \tau\lambda^{1/\alpha}/\alpha$ v $\arccos\left(\frac{p\exp(p)}{|z|}\right) + \frac{\sqrt{|z|^2 - p^2\exp(2p)}}{\exp(p)} < |\mathrm{Arg}(z)|$ ihned máme

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\tau}{\alpha}|\lambda|^{1/\alpha} < \left|\mathrm{Arg}\left(\frac{\tau}{\alpha}\lambda^{1/\alpha}\right)\right| = \frac{1}{\alpha}|\mathrm{Arg}(\lambda)|, \quad \text{i.e.,} \quad |\lambda| < \left(\frac{|\mathrm{Arg}(\lambda)| - \alpha\pi/2}{\tau}\right)^{\alpha}.$$



- Množina všech $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující poslední nerovnost je označena $\Omega_0^{\alpha,\tau}$.
- Rovnice (♠) is AS $\iff \lambda \in \Omega_0^{\alpha,\tau}$.

- Obrázek odpovídá $\alpha = 1.2$ a $\tau = 1$.



Modré křivky reprezentují místa všech $\lambda \in \mathbb{C}$ takových, že kořen s_0 rovnice $s^\alpha - \lambda \exp(-\tau s) = 0$ má stále stejnou reálnou část, oranžové křivky pak místa všech $\lambda \in \mathbb{C}$, které dávají s_0 se stejnou imaginární částí (v absolutní hodnotě).

Věta [ČKN, 2023]

Nechť $\alpha > 1$, $\tau > 0$ *a* $\lambda \in \mathbb{C}$.

- *Jestliže* $\lambda \in \Omega_0^{\alpha,\tau}$, *pak každé řešení* x *rovnice* (♠) *splňuje*

$$x(t) = \mathcal{O}(t^{1-\alpha}) \quad \textit{pro} \quad t \to \infty \quad \textit{(a rychlost poklesu nelze zlepšit).}$$

- *Jestliže* $\lambda \notin \Omega_0^{\alpha,\tau}$, *pak každé řešení* x *rovnice* (♠) *splňuje*

$$x(t) = \exp(u_0 t)(c \exp(\mathrm{i}\, v_0 t) + o(1)) \quad \textit{pro} \quad t \to \infty,$$

kde c *je nějaká komplexní konstanta,* $u_0 \geq 0$ *je (jednoznačné) řešení rovnice*

$$\alpha \arccos\left(\frac{u \exp(\tau u/\alpha)}{|\lambda|^{1/\alpha}}\right) + \frac{\tau\sqrt{|\lambda|^{2/\alpha} - u^2 \exp(2\tau u/\alpha)}}{\exp(\tau u/\alpha)} = |\mathrm{Arg}(\lambda)|,$$

$v_0 > 0$ *je (jednoznačné) řešení rovnice*

$$\frac{v^\alpha}{\sin^\alpha\big((|\mathrm{Arg}(\lambda)| - \tau v)/\alpha\big)} \exp\big(\tau v \cot\big((|\mathrm{Arg}(\lambda)| - \tau v)/\alpha\big)\big) = |\lambda|,$$

pokud $|\mathrm{Arg}(\lambda)| > 0$, *a* $v_0 = 0$, *pokud* $\mathrm{Arg}(\lambda) = 0$.

- Řešení lze napsat pomocí „zpožděné“ Mittag-Lefflerovy funkce

$$G_{\alpha,\beta}^{\lambda,\tau}(t) = \sum_{j=0}^{\lceil t/\tau \rceil - 1} \frac{\lambda^j (t - j\tau)^{\alpha j + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

- [ČK, 2019] Jestliže $\phi : \langle -\tau, 0 \rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá počáteční funkce, $\phi_0 = \phi(0)$ and ϕ_j, $j = 1, \ldots, \lceil \alpha \rceil - 1$, jsou (komplexní) konstanty (ty uvažujeme pokud $\alpha > 1$), pak

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \phi_j G_{\alpha,j+1}^{\lambda,\tau}(t) + \lambda \int_{-\tau}^{0} G_{\alpha,\alpha}^{\lambda,\tau}(t - \tau - \xi) \phi(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

  je řešení (♠) splňující $x(t) = \phi(t)$ pro každé $t \in \langle -\tau, 0 \rangle$, a

$$\lim_{t \to 0^+} x^{(j)}(t) = \phi_j, \quad j = 1, \ldots, \lceil \alpha \rceil - 1.$$

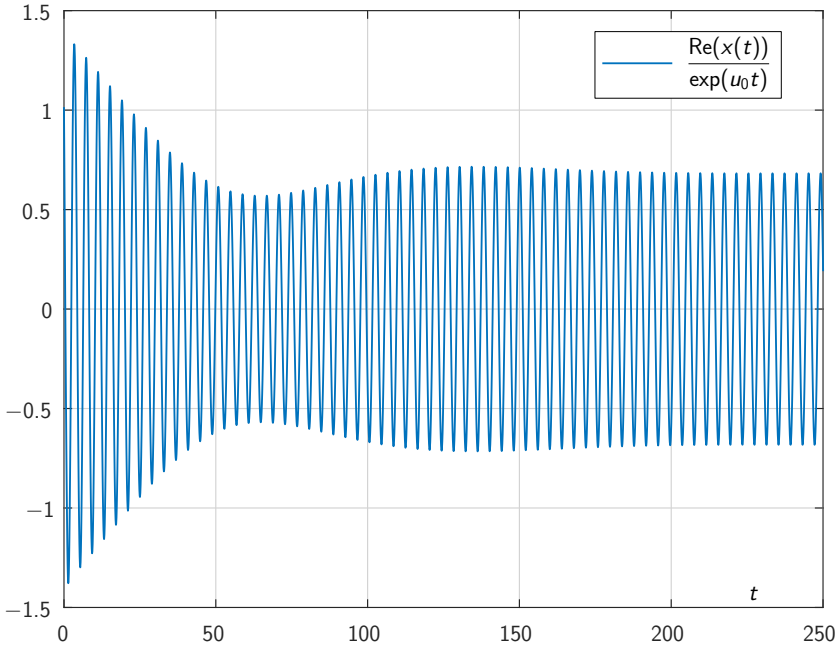
- Metoda Laplaceovy transformace umožňuje získat asymptotiku funkcí $G_{\alpha,\beta}^{\lambda,\tau}$, což implikuje

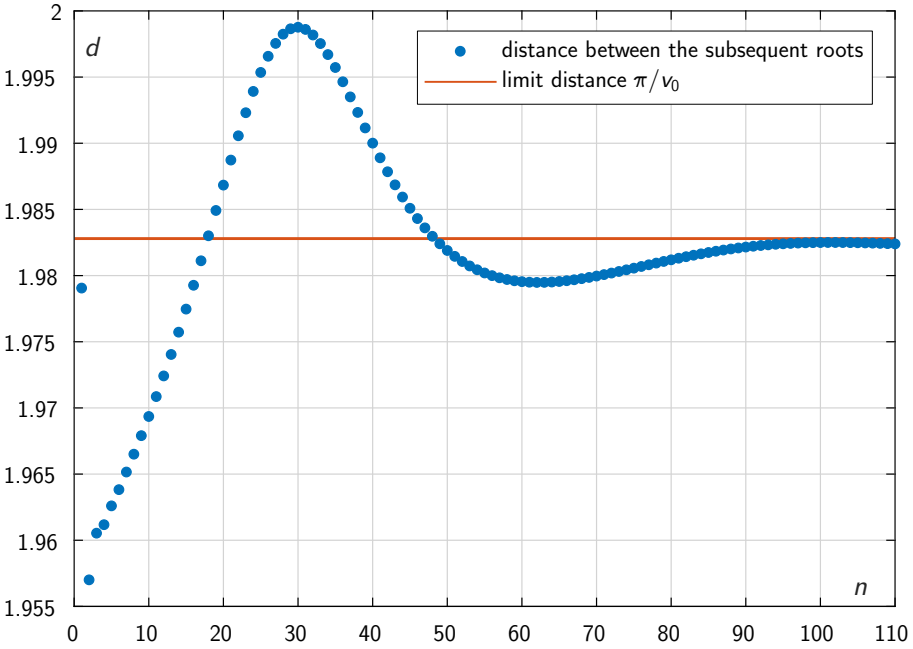
$$x(t) = \sum_{s \in S} c_s \exp(st) + \mathcal{O}(t^{j-\alpha}) \quad \text{pro } t \to \infty,$$

  kde S je množina kořenů charakteristické rovnice s nezápornou reálnou částí.

- $x(t) = \mathcal{O}(\exp(u_0 t))$ pro $t \to \infty$ a každé řešení x rovnice (♠) (konstanta u_0 je nezlepšitelná).
- Oscilace reálné a imaginární části řešení x se blíží k oscilacím $\cos(v_0 t)$ a $\sin(v_0 t)$ (vzdálenost dvou po sobě jdoucích kořenů řešení x konverguje k π/v_0).

Příklad. Uvažujme (♠) pro $\alpha = 1.2$, $\tau = 1$ a $\lambda = -3 + 0.1\mathrm{i}$ s počáteční podmínkou $\phi(t) = 1$ pro $t \in \langle -\tau, 0\rangle$, $\lim_{t\to 0+} x'(t) = 0$. V tomto případě je $u_0 \approx 0.4917$, $v_0 \approx 1.5844$:





- Pro dané $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $k \in \mathbb{Z}$ chceme numericky vyčíslit hodnotu $w_k = W_k(z)$. Číslo podmíněnosti (poměr relativních chyb výstupu a vstupu):

$$C \approx \left| \frac{zW'(z)}{W(z)} \right| = \frac{1}{|1 + W(z)|}, \qquad W'(z) = \frac{W(z)}{(1 + W(z))z}, \quad z \notin \left\{0, -\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}.$$

  Ihned vidíme, že výpočet w_k je špatně podmíněnou úlohou pro $k = 0, \pm 1$ v okolí $z = -1/\mathrm{e}$ („branch point“), kde $W_k(z) \approx -1$. Není problém v okolí $z = 0$, to je ale jenom proto, že sledujeme relativní chybu.

- Lagrangeova věta o inverzi (Lagrangeův–Bürmannův vzorec): *Je-li $z = f(w)$ funkce analytická v bodě w_0 a $f'(w_0) \neq 0$, pak existuje okolí bodu w_0, na kterém má f inverzi f^{-1}. Tato inverze je analytická v bodě $z_0 = f(w_0)$ a platí*

$$f^{-1}(z) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(z - z_0)^n, \quad \text{kde} \quad a_n = \lim_{w \to w_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}w^{n-1}} \left[\left(\frac{w - w_0}{f(w) - f(w_0)} \right)^n \right]$$

  Díky tomuto tvrzení lze snadno odvodit, že v okolí počátku platí

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n = z - z^2 + \frac{3}{2}z^3 - \frac{8}{3}z^4 + \frac{125}{24}z^5 - \ldots, \quad r = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Např.

$$0.091277 \doteq W_0(0.1) \approx 0.1 - 0.1^2 + \frac{3}{2}0.1^3 - \frac{8}{3}0.1^4 \doteq 0.091233$$

- Padého aproximanty W_0 v okolí počátku

$$[1/0]w_0(z) = z, \quad [1/1]w_0(z) = \frac{z}{1+z},$$
$$[2/1]w_0(z) = \frac{z + \frac{1}{2}z^2}{1 + \frac{3}{2}z}, \quad [2/2]w_0(z) = \frac{z + \frac{4}{3}z^2}{1 + \frac{7}{3}z + \frac{5}{6}x^2}$$

$0.091277 \doteq W_0(0.1) \approx [2,2]w_0(0.1) \doteq 0.091275.$

- V okolí bodu $z = -1/\mathrm{e}$ je situace složitější, využívá se řady

$$W_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j s^j = -1 + s - \frac{1}{3}s^2 + \frac{11}{72}s^3 + \ldots\Big|_{s=\sqrt{2(\mathrm{e}z+1)}}, \quad r = \sqrt{2},$$

$$\mu_j = \frac{j-1}{j+1}\left(\frac{\mu_{j-2}}{2} + \frac{\nu_{j-2}}{4}\right) - \frac{\nu_j}{2} - \frac{\mu_{j-1}}{j+1}, \quad \nu_j = \sum_{\ell=2}^{j-1} \mu_\ell \mu_{j+1-\ell}, \ \nu_0 = 2, \ \nu_1 = -1.$$

Pro W_{-1} a $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ (resp. W_1 a $\mathrm{Im}(z) < 0$) bereme $s = -\sqrt{2(\mathrm{e}z+1)}$.

- Jak se získá? Píšeme-li $W(z) = -1+p(z)$, pak pro z blízké $-1/\mathrm{e}$ je $p(z)$ „malé“. Dosazením do $W(z)\exp(W(z)) = z$ dostaneme $\mathrm{e}z = (-1+p(z))\exp(p(z))$, a protože $p(z)$ je malé, $\exp(p(z)) \approx 1 + p(z)$. Náhradou v poslední rovnosti tedy máme

$$ez = p^2(z) - 1 = \frac{s^2(z)}{2} - 1\Big|_{p(z)=s(z)/\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad s(z) = \pm\sqrt{2(\mathrm{e}z+1)}.$$

- Odvození rekurentních vztahů je založeno na rovnosti

$$2s(z)W(z) = \left(\frac{s^2(z)}{2} - 1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(1+W(z))^2.$$

Např.

$$-0.716639 \doteq W_0(-0.35) \approx -1 + 0.3118 - \frac{1}{3}0.3118^2 + \frac{11}{72}0.3118^3 \doteq -0.715975.$$

- Pro dané $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ hledáme (numericky) řešení rovnice $g_z(w) = w\exp(w) - z = 0$.
- Halleyova metoda (konvergence je pro „dobré funkce“ v blízkosti kořene kubická):

$$w_{j+1} = w_j - \frac{g(w_j)}{g'(w_j)}\left(1 - \frac{g(w_j)}{g'(w_j)} \cdot \frac{g''(w_j)}{2g'(w_j)}\right)^{-1}$$

Pro g_z má tvar

$$w_{j+1} = w_j - \frac{w_j \exp(w_j) - z}{\exp(w_j)(w_j+1) - \dfrac{(w_j+2)(w_j\exp(w_j) - z)}{2w_j+2}}.$$

$$W_k(z) = \log_k(z) - \mathrm{Log}(\log_k(z)) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!}\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} \frac{\left(\mathrm{Log}(\log_k(z))\right)^m}{\log_k^{n+m}(z)},$$

kde [:] je Stirlingovo číslo prvního druhu bez znaménka (v absolutní hodnotě), např.

$$(x)_4 := x(x-1)(x-2)(x-3) = \underbrace{1}_{\left[{4 \atop 4}\right]} x^4 - \underbrace{6}_{\left[{4 \atop 3}\right]} x^3 + \underbrace{11}_{\left[{4 \atop 2}\right]} x^2 - \underbrace{6}_{\left[{4 \atop 1}\right]} x$$

$$f_z(p) = \arccos\left(\frac{p\exp(p)}{|z|}\right) + \frac{\sqrt{|z|^2 - p^2\exp(2p)}}{\exp(p)},$$

kde p je reálná proměnná, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je parametr.

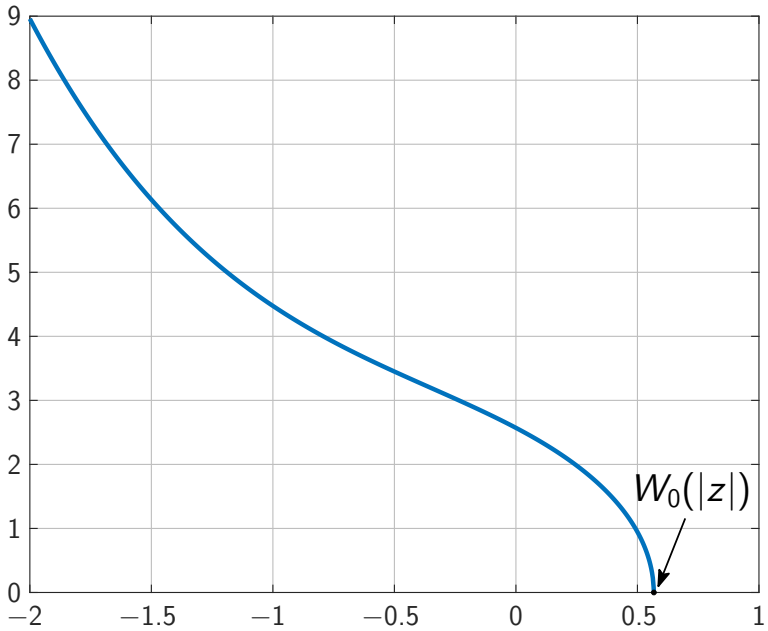
- Jestliže $|z| \geq 1/\mathrm{e}$, pak $D(f_z) = (-\infty, W_0(|z|)\rangle$.
- Jestliže $0 < |z| < 1/\mathrm{e}$, pak

$$D(f_z) = (-\infty, W_{-1}(-|z|)\rangle \cup \langle W_0(-|z|), W_0(|z|)\rangle.$$

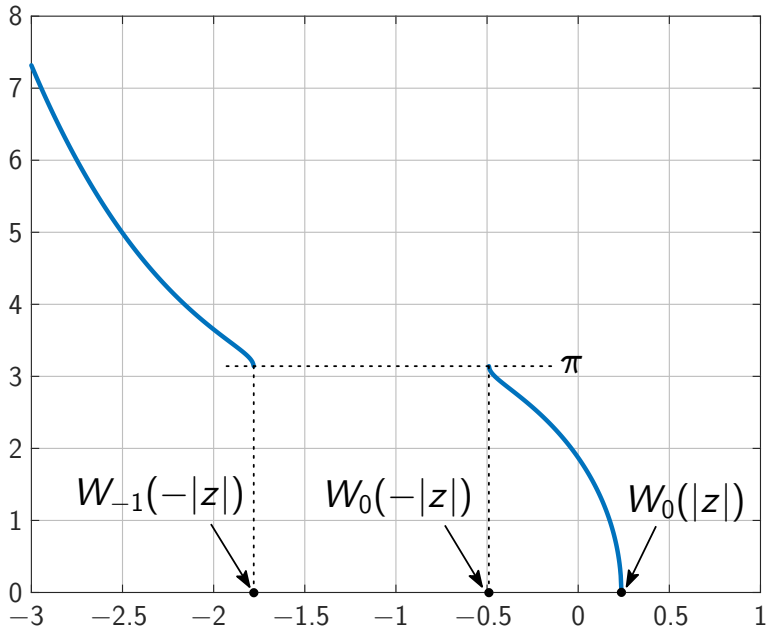
- Pro jakékoliv $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je obrazem definičního oboru funkce f_z interval $\langle 0, \infty)$, přičemž

$$\lim_{p\to-\infty} f_z(p) = \infty \qquad \text{a} \qquad f_z(W_0(|z|)) = 0.$$

Je-li $|z| \geq 1/\mathrm{e}$, pak f_z je spojitá a klesající funkce na celém $D(f_z)$, je-li $|z| < 1/\mathrm{e}$, pak f_z je spojitá a klesající na obou intervalech definičního oboru a $f_z(W_{-1}(-|z|)) = f_z(W_0(-|z|)) = \pi$. Navíc, f_z má v bodě $W_0(|z|)$ nevlastní levostrannou derivaci $-\infty$ (v případě $|z| < 1/\mathrm{e}$ také v bodech $W_{-1}(-|z|)$ a $W_0(-|z|)$).



$|z| = 1$



$|z| = 0.3$

- Uvažujeme-li nyní rovnici

$$f_z(p) = |\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi|, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{♥}$$

pak výše uvedené vlastnosti implikují, že (♥) má (pro libovolné $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) jediný kořen $p_{k,z}$ až na případ, kdy $|z| < 1/\mathrm{e}$, $\mathrm{Arg}(z) = \pi$ a $k \in \{-1, 0\}$. Pokud nastane, tak rovnice má dva kořeny. Tuto nejednoznačnost odstraňme tak, že pro $k = 0$ uvažujme pouze $p_{0,0} = W_0(-|z|)$, kdežto pro $k = -1$ pouze $p_{-1,z} = W_{-1}(-|z|)$.

Věta

Nechť $p_{k,z}$ je (jednoznačně určený) kořen rovnice (♥). Pak platí

$$p_{k,z} = \mathrm{Re}(W_k(z)).$$

- Známe-li $\mathrm{Re}(W_k(z))$, pak $\mathrm{Im}(W_k(z))$ již lze vyjádřit explicitně jako

$$\mathrm{Im}(W_k(z)) = \frac{\sqrt{|z|^2 - \mathrm{Re}^2(W_k(z))\exp\big(2\mathrm{Re}(W_k(z))\big)}}{\exp\big(\mathrm{Re}(W_k(z))\big)}.$$

- Pro lokalizaci kořene by mohly být užitečné následující (známé) odhady: Jestliže $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \geq \mathrm{e}$, pak

$$\ln(\xi) - \ln\ln(\xi) + \frac{\ln(\ln(\xi))}{2\ln(\xi)} \leq W_0(\xi) \leq \ln(\xi) - \ln(\ln(\xi)) + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \cdot \frac{\ln(\ln(\xi))}{\ln(\xi)}.$$

Jestliže $\xi \in \mathbb{R}$, $1 < x < \mathrm{e}$, pak

$$\frac{\ln(\xi)}{1+\ln(\xi)}\big(\ln(\xi) - \ln(\ln(\xi)) + 1\big) \leq W_0(\xi) \leq (\ln(\xi))^{\frac{\ln(\xi)}{1+\ln(\xi)}}.$$

Jestliže $\xi \in \mathbb{R}$, $-1/\mathrm{e} \le \xi \le 0$, pak

$$\sqrt{\xi \mathrm{e} + 1} - 1 \le W_0(\xi) \qquad \text{a} \qquad \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2 \mathrm{e}^2}}{\xi \mathrm{e}} \le W_0(\xi).$$

Jestliže $\xi \in \mathbb{R}$, $-1/\mathrm{e} \le \xi < 0$, pak

$$\frac{\mathrm{e} \ln(-\xi)}{\mathrm{e} - 1} \le W_{-1}(\xi) \le \ln(-\xi) - \ln(-\ln(-\xi)).$$

- $k > 0$: Jestliže $0 \le \operatorname{Arg}(z) \le \pi$, pak pro kořeny $p_{\pm k,z}$ rovnice (♥) platí:

$$p_{k,z} < \ln|z| - \ln((2k-1)\pi),$$
$$p_{-k,z} < \ln|z| - \ln((2k-2)\pi), \qquad \text{(odhad se stává nekonečným pro } k = 1\text{)}.$$

Je-li $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < 0$, pak lze využít vlastnost $W_k(\overline{z}) = \overline{W_{-k}(z)}$, platnou pro každé $k = 0, 1, \ldots$ a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Arg}(z) \ne \pi$. Odhady jsou poměrně hrubé (zejména pro velká z a k), patrně někdy mohou být napravo od hodnoty $W_0(|z|)$. Nemáme odhad $p_{\pm k,z}$ zdola. Lokalizace kořene by šla provést „posunem doleva“ od horního odhadu s testem znaménkové změny. Jak toto efektivně udělat??

- Pro $-1/\mathrm{e} \leq \xi \leq \mathrm{e}$ platí

$$W_0(\xi) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\exp(\exp(\mathrm{i}t)) - \xi\exp(\exp(-\mathrm{i}t))}{\exp(\exp(\mathrm{i}t)) - \xi\exp(\exp(\mathrm{i}t))}\right)\mathrm{d}t.$$

- Pro $|z| < 1/\mathrm{e}$ platí

$$W_0(z) = \frac{1}{\pi}\ln\left(1 + z\frac{\sin(t)}{t}\exp(t\operatorname{cotg}(t))\right)\mathrm{d}t.$$

- Pro $|z| < 1/\mathrm{e}$ platí

$$W_0(z) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1+x}{1 + \cfrac{x/2}{1 + \cfrac{5x/6}{1 + \cfrac{17x/30}{1 + \ddots}}}}}.$$

R. M.Corless, G. H.Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jffrey, D. E. Knuth, *On the Lambert W function*, Adv. Comput. Math. **5** (1996), 329–359.

I. Mező, *The Lambert W Function, Its Generalizations and Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2022.

J. H. Lambert, *Observationes variae in mathesin puram*, Acta Helveticae physico-mathematico-anatomico-botanico-medica, Band III (1758), 128–168.

J. H.Lambert, *Observations analytiques*, Nouveaux Mémoires de l'Acadéemie Royale des Sciences de Berlin, année 1770/1772, 225–244.

L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser.1, 1779, 350–369.

H. Shinozaki, T. Mori, *Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results*, Automatica **42** (2006), 1791–1799.

J. Nishiguchi, *On parameter dependence of exponential stability of equilibrium solutions in differential equations with a single constant delay*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), 5657–5679.

J. Čermák, L. Nechvátal, T. Kisela, *The Lambert function method in qualitative analysis of fractional delay differential equations*, Fract. Calc. Appl. Anal **26** (2023), 1545–1565.

Y. Chen, K. L. Moore, *Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems*, Nonlinear Dyn. **29** (2002), 191–200.

I. Podlubný, *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Academic Press, San Diego, 1999.

J. Čermák, T. Kisela, *Oscillatory and asymptotic properties of fractional delay differential equations*, Electron. J. Differ. Equ. **2019** (2019), Paper No. 33, 15 pp.

T. Fukushima, *Precise and fast computation of Lambert W-functions without transcendental function evaluations*, J. Comput. Appl. Math. **244** (2013), 77–89.

F. Johansson, *Computing the Lambert W function in arbitrary-precision complex interval arithmetic*, Numer. Algorithms **83** (2020), 221–242.

L. Lóczi, *Guaranteed- and high-precision evaluation of the Lambert W function*, Appl. Math. Comput. 433 (2022), Article ID 127406, 22 pp.