

# Metoda vnitřního bodu pro kontaktní úlohy a úlohy proudění se skluzovou podmínkou

**Radek Kučera**

Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava  
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

**Spoluautoři:** Machalová, J., Netuka, H., Ženčák, P.  
Brzobohatý, T., Jarošová, M., Šátek, V.

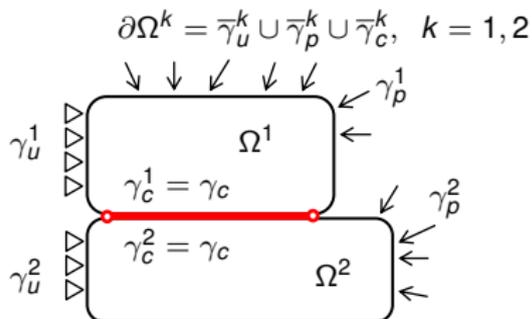
PANM 22  
23.– 28. června 2024, Hejnice

- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)
- 6 Numerické experimenty

- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)
- 6 Numerické experimenty

# Kontaktní úloha lineární pružnosti s Trescovým třením

- Elastická tělesa  $\Omega^1, \Omega^2 \subset \mathbb{R}^3$ :



- Lamého PDR + okrajové podm.:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^k &= \mathbf{f}^k && \text{v } \Omega^k \\ \boldsymbol{\sigma}^k &= \mu^k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^k) \mathbf{I} + 2\lambda^k \boldsymbol{\varepsilon}^k && \text{v } \Omega^k \\ \boldsymbol{\varepsilon}^k &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^k + \nabla^\top \mathbf{u}^k) && \text{v } \Omega^k \\ \mathbf{u}^k &= \mathbf{0} && \text{na } \gamma_u^k \\ \boldsymbol{\sigma}^k \mathbf{n}^k &= \mathbf{p}^k && \text{na } \gamma_p^k \end{aligned}$$

pro  $k = 1, 2$ .

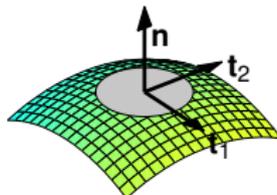
- Jednostranný kontakt na  $\gamma_c$ :

$$u_n - d \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n(u_n - d) = 0.$$

- Trescovo tření na  $\gamma_c$ : mez skluzu  $g \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_t\| &\leq g \\ \|\boldsymbol{\sigma}_t\| < g &\Rightarrow \mathbf{u}_t = \mathbf{0} \\ \|\boldsymbol{\sigma}_t\| = g &\Rightarrow \exists c \geq 0 : \mathbf{u}_t = -c\boldsymbol{\sigma}_t \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_t = (u_{t_1}, u_{t_2}), \quad \boldsymbol{\sigma}_t = (\sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}) \in \mathbb{R}^2,$$

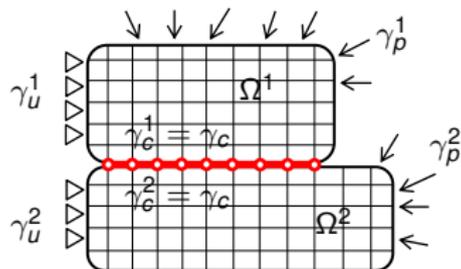


$\{\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$  lokální báze v bodech  $\gamma_c$ .

- Výchozí úloha pro složitější modely tření (Coulombův, koeficient závislý na řešení, ...).

# Algebraická úloha z MKP

- Aproximace MKP:



- Primárně-duální úloha:

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\lambda}_t) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2m}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda}_n + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{N}\mathbf{u} - \mathbf{d} \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}_n \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}_n^T (\mathbf{N}\mathbf{u} - \mathbf{d}) = 0$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}_{t,i}\| \leq g_i$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}_{t,i}\| < g_i \Rightarrow \mathbf{u}_{t,i} = \mathbf{0}$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}_{t,i}\| = g_i \Rightarrow \exists c_i \geq 0 : \mathbf{u}_{t,i} = c_i \boldsymbol{\lambda}_{t,i}$$

$$i \in \mathcal{M} = \{1, \dots, m\}.$$

- Eliminace složek posunutí:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_n; \boldsymbol{\lambda}_t) \in \mathbb{R}^{3m}, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{N}; \mathbf{T}),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda})$$

- Duální úloha:

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h},$$

kde  $\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^T$ , je symetrická a pozitivně definitní,  $\mathbf{h} = \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - (\mathbf{d}; \mathbf{0})$ .

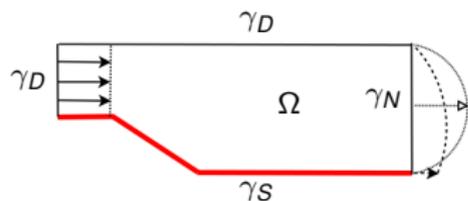
Přípustná množina má tvar:

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda}_n \geq \mathbf{0}, \|\boldsymbol{\lambda}_{t,i}\| \leq g_i, i \in \mathcal{M}\}.$$

# Úlohy proudění se skluzovou podmínkou

- Proudění v kanále  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ :

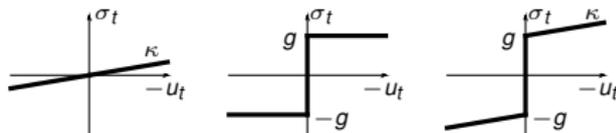
$$\partial\Omega = \bar{\gamma}_D \cup \bar{\gamma}_N \cup \bar{\gamma}_S$$



- Stokesovy PDR + okrajové podm.:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{v } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{v } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & \text{na } \gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_N & \text{na } \gamma_N \\ u_n &= 0 & \text{na } \gamma_C \\ u_t = 0 &\Rightarrow |\sigma_t| \leq g & \text{na } \gamma_S \\ \sigma_t u_t + g|u_t| + \kappa u_t^2 &= 0 & \text{na } \gamma_S \end{aligned}$$

- Skluzová podmínka: mez skluzu  $g \geq 0$ , adheze  $\kappa \geq 0$ ,



Navier  
(1826)  
 $g = 0$

Tresca  
(1994)  
 $\kappa = 0$

Navier+Tresca  
(2013)  
 $g > 0, \kappa > 0$

- Duální úloha pro  $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_t; \boldsymbol{\lambda}_n; \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2m+n_p}$ :

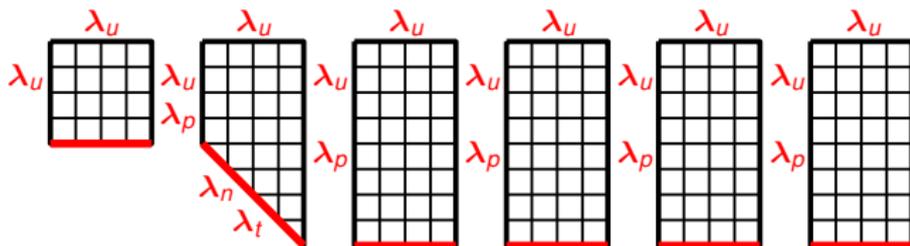
$$\boldsymbol{\lambda}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{F}_\kappa \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{h}$$

na přípustné množině

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} : |\lambda_{t,i}| \leq g_i, i \in \mathcal{M}\}.$$

# Algebraická úloha z TFETI metody

- Rozložení oblasti:



- Spojitost MKP aproximací  $\mathbf{u}_h$  a  $p_h$  mezi podoblastmi  $\Omega$  vynucují Lagrangevy multiplikátory:  $\lambda_u$  pro rychlost a  $\lambda_p$  pro tlak.
- Primárně-duální úloha:  $(\mathbf{u}, \lambda_t, \lambda_n, \lambda_u, \lambda_p, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2m_u} \times \mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{n_p}$

$$\mathbf{A}_\kappa \mathbf{u} + \mathbf{T}^\top \lambda_t + \mathbf{N}^\top \lambda_n + \mathbf{B}_u^\top \lambda_u + \mathbf{B}_p^\top \lambda_p + \mathbf{B}^\top \mathbf{p} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_u \mathbf{u} = \mathbf{u}^D, \mathbf{B}_p \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{T} \mathbf{u})_i &= 0 \Rightarrow |\lambda_{t,i}| \leq g_i \\ (\mathbf{T} \mathbf{u})_i &> 0 \Rightarrow \lambda_{t,i} = g_i \\ (\mathbf{T} \mathbf{u})_i &< 0 \Rightarrow \lambda_{t,i} = -g_i \end{aligned} \right\} i \in \mathcal{M}$$

# Algebraická úloha z metody TFETI

- Eliminace rychlosti:  $\lambda = (\lambda_t; \lambda_n; \lambda_u; \lambda_p; \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{C} = (\mathbf{T}; \mathbf{N}; \mathbf{B}_u; \mathbf{B}_p; \mathbf{B})$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_\kappa^+(\mathbf{f} - \mathbf{C}^\top \lambda) + \mathbf{R}\alpha, \quad \mathbf{0} = \mathbf{R}^\top(\mathbf{f} - \mathbf{C}^\top \lambda),$$

kde  $\mathbf{A}_\kappa^+$  je zobecněná inverze k  $\mathbf{A}_\kappa$  a  $\mathbf{R}$  je báze nulového prostoru  $\mathbf{A}_\kappa$ .

- Duální úloha:

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{2} \lambda^\top \mathbf{F}_\kappa \lambda - \lambda^\top \mathbf{h}$$

na přípustné množině

$$\Lambda = \{\lambda : |\lambda_{t,i}| \leq g_i, i \in \mathcal{M}, \mathbf{G}\lambda = \mathbf{e}\},$$

kde  $\mathbf{G}$  má plnou řádkovou hodnotu,  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^\top \mathbf{C}^\top$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{R}^\top \mathbf{f}$ ,  
a  $\mathbf{F}_\kappa$  je symetrická a pozitivně definitní na  $\text{Ker} \mathbf{G}$ .

# Jak vzniknou nerovnostní omezení v $\Lambda$ ?

- Primární úloha (v rychlostech):

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{V}_B} J(\mathbf{u})$$

$$\text{kde } J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{A}_{\kappa} \mathbf{u} - \mathbf{f}^\top \mathbf{u} + \sum_{i=1}^m g_i |u_{t,i}|, \quad \mathbf{A}_{\kappa} := \mathbf{A} + \mathbf{T}^\top \mathbf{D}_{\kappa} \mathbf{T},$$

$$\text{a } \mathbb{V}_B = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

- Regularizace nehladkého členu:

Ve 2D pro  $u_{t,i}, \lambda_{t,i}, g_i \in \mathbb{R}$  platí:

$$g_i |u_{t,i}| = \max_{|\lambda_{t,i}| \leq g_i} \lambda u_{t,i}.$$

Ve 3D pro  $\mathbf{u}_{t,i}, \boldsymbol{\lambda}_{t,i} \in \mathbb{R}^2, g_i \in \mathbb{R}$  platí (z Cauchyho nerovnosti):

$$g_i \|\mathbf{u}_{t,i}\| = \max_{\|\boldsymbol{\lambda}_{t,i}\| \leq g_i} \boldsymbol{\lambda}_{t,i}^\top \mathbf{u}_{t,i}.$$

# Jak vzniknou nerovnostní omezení v $\Lambda$ ?

- Sedlobodová úloha:

$$(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \arg \min_{\mathbf{u}} \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$$

kde Lagrangian má tvar  $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{A}_k \mathbf{u} - \mathbf{f}^\top \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{C} \mathbf{u}$

pro  $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_t; \boldsymbol{\lambda}_n; \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{C} = (\mathbf{T}; \mathbf{N}; \mathbf{B})$

a přípustnou množinu  $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} : |\lambda_{t,i}| \leq g_i, i \in \mathcal{M}\}$ .

- Duální úloha: vznikne vyeliminováním  $\mathbf{u}$  podle  $\partial_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ .

- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)**
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)
- 6 Numerické experimenty

# Formulace úlohy 1

- Minimalizační úloha s omezením (QCQP):

$$x^* = \arg \min_{x \in \Omega} q(x),$$

kde

$$q(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - x^\top b,$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická pozitivně definitní,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,

$x = (x_1^\top, x_2^\top, x_3^\top)^\top \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 3m$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{1,i} \geq l_i, x_{2,i}^2 + x_{3,i}^2 \leq g_i^2, i = 1, \dots, m\},$$

$l = (l_1, \dots, l_m)^\top$ ,  $g = (g_1, \dots, g_m)^\top$ ,  $g_i \geq 0$ .

- $\exists!$  řešení  $x^* \in \mathbb{R}^n$  (minimum ostře konvexní kvadratické funkce na konvexní množině).

# Karush–Kuhn–Tuckerovy podmínky optimality

- Lagrangeova funkce:

$$L(x, \nu) = q(x) + \sum_{i=1}^m \nu_{1,i}(l_i - x_{1,i}) + \sum_{i=1}^m \nu_{2,i}(x_{2,i}^2 + x_{3,i}^2 - g_i^2),$$

$\nu = (\nu_1^\top, \nu_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2m}$  jsou Lagrangeovy multiplikátory.

- $\exists!$  řešení  $(x^*, \nu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2m}$  KKT systému:

$$\partial_x L(x, \nu) = 0, \quad \partial_\nu L(x, \nu) \leq 0, \quad \nu^\top \partial_\nu L(x, \nu) = 0, \quad \nu \geq 0.$$

- Pomocná proměnná  $z = (z_1^\top, z_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2m}$ :  $z := -\partial_\nu L(x, \nu)$ ,

$$\partial_x L(x, \nu) = 0, \quad \partial_\nu L(x, \nu) + z = 0, \quad \nu^\top z = 0, \quad \nu \geq 0, \quad z \geq 0,$$

neboli

$$\partial_x L(x, \nu) = 0, \quad \partial_\nu L(x, \nu) + z = 0, \quad N z e_{2m} = 0, \quad \nu \geq 0, \quad z \geq 0,$$

kde  $N = \text{diag}(\nu)$ ,  $Z = \text{diag}(z) \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ ,  $e_{2m} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{2m}$

- Pro Newtonovu funkci  $F : \mathbb{R}^{n+4m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+4m}$ ,

$$F(v) = \begin{pmatrix} \partial_x L(x, \nu) \\ \partial_\nu L(x, \nu) + z \\ NZe_{2m} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ \nu \\ z \end{pmatrix},$$

dostáváme úlohu:

$$F(v) = 0, \quad \nu \geq 0, \quad z \geq 0.$$

- $\exists!$  řešení  $v^* = (x^{*\top}, \nu^{*\top}, z^{*\top})^\top \in \mathbb{R}^{n+4m}$ .
- Nejjednodušší metoda vnitřního bodu = Newtonova metoda s tlumením.

Generuje posloupnost  $\{v^{(k)}\}$ , kde  $\nu^{(k)} > 0$ ,  $z^{(k)} > 0$ .

Konverguje k řešení  $v^*$  **ležícímu na hranici** prvního (hyper)kvadrantu vzhledem k  $\nu$  a  $z$ .

# Newtonova metoda s tlumením (DNM)

- Iterační schéma:

$$\begin{aligned} J(v^{(k)}) \Delta v^{(k+1)} &= -F(v^{(k)}), \\ v^{(k+1)} &= v^{(k)} + \alpha_k \Delta v^{(k+1)}. \end{aligned}$$

- Jacobiho matice  $J : \mathbb{R}^{n+4m} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+4m) \times (n+4m)}$  k funkci  $F$ .
- Vyřešením soustavy vypočítáme Newtonovský směr  $\Delta v^{(k+1)}$ .
- Celý Newtonovský krok dostaneme pro délku:  $\alpha_k = 1$ .
- Zkrácením kroku,  $\alpha_k \in (0, 1)$ , zajistíme  $v^{(k+1)} > 0$ ,  $z^{(k+1)} > 0$ :

$$\alpha_k = \min\{1, -\delta v_{n+i}^{(k)} / \Delta v_{n+i}^{(k+1)} : \Delta v_{n+i}^{(k+1)} < 0, i = 1, \dots, 4m\},$$

kde  $\delta \in (0, 1)$  je tlumení.

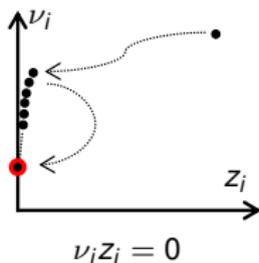
- Počáteční aproximaci volíme „uvnitř“ prvního kvadrantu:

$$x^{(0)} = 0, \quad v^{(0)} = c_v e_{2m}, \quad z^{(0)} = c_z e_{2m}, \quad c_v, c_z > 0.$$

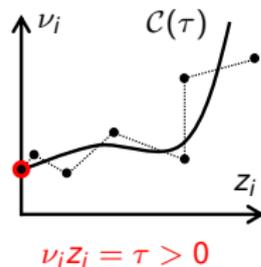
- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)**
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)
- 6 Numerické experimenty

# Hlavní idea

DNM:



PF:



- Posloupnost  $\{v^{(k)}\}$  se snažíme držet „hluboko“ v prvním kvadrantu, abychom mohli vykonávat dlouhé kroky a dostali rychlou konvergenci.
- Zavedeme pomocné úlohy s parametrem  $\tau > 0$ :

$$F(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e_{2m} \end{pmatrix}, \quad \nu \geq 0, z \geq 0. \quad (1)$$

• **Centrální cesta:**

$$C(\tau) = \{v^\tau \in \mathbb{R}^{n+4m} : v^\tau \text{ řeší (1) pro } \tau \in (0, T]\}.$$

- Platí:  $v^\tau \rightarrow v^*$ , jestliže  $\tau \rightarrow 0+$ .
- Newtonovské iterace kombinujeme s poklesem:  $\tau = \tau_k$ .

- Míra duality:

$$\vartheta = \vartheta(\nu) = \frac{\nu^\top z}{2m}.$$

- Okolí centrální cesty šířky  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\beta \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\gamma, \beta) &= \{v \in \mathbb{R}^{n+4m} : \nu \geq 0, z \geq 0, \\ &\quad \nu_i z_i \geq \gamma \vartheta, i = 1, \dots, 2m, \\ &\quad \|\partial_x L(x, \nu)\| \leq \beta \vartheta, \|\partial_\nu L(x, \nu) + z\| \leq \beta \vartheta\}. \end{aligned}$$

- Platí:  $\mathcal{C}(\tau) \subseteq \mathcal{N}(\gamma, \beta)$ ,  $\mathcal{C}(\tau) = \mathcal{N}(1, 0)$ .

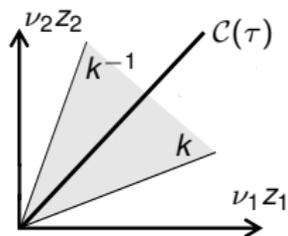
## Lemma

Nechť  $v = (x^\top, \nu^\top, z^\top)^\top \in \mathcal{N}(\gamma, \beta)$  a  $\nu_i = 0$  nebo  $z_i = 0$  pro aspoň jedno  $i \in \{1, \dots, 2m\}$ .  
Potom  $v = v^*$ .

# Okolí centrální cesty graficky

- $m = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 z_1 &\geq \gamma \frac{\nu_1 z_1 + \nu_2 z_2}{2} &\iff & \nu_1 z_1 \geq k \nu_2 z_2 \\ \nu_2 z_2 &\geq \gamma \frac{\nu_1 z_1 + \nu_2 z_2}{2} &\iff & \nu_2 z_2 \geq k \nu_1 z_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= \gamma / (2 - \gamma) \\ k &\in (0, 1] \end{aligned}$$



- 2m-stranný kužel v prvním 2m-kvadrantu určený směrnici  $k$ .
- Centrální cesta je zde jeho osa.

Nechť  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\beta \geq 1$ ,  $\omega \in (0, 1)$  a  $\varepsilon \geq 0$ . Nechť  $v^{(0)} \in \mathcal{N}(\gamma, \beta)$  a  $k := 0$ .

(1°) Zvol centrující parametr  $\sigma_k \in [0, \frac{1}{2}]$  a  $\vartheta_k = \sigma_k \vartheta_k$ .

(2°) Vyřeš:

$$J(v^{(k)})\Delta v^{(k+1)} = -F(v^{(k)}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_k e_{2m} \end{pmatrix}.$$

(3°) Vypočti  $v^{(k+1)} = v^{(k)} + \alpha_k \Delta v^{(k+1)}$  pomocí největšího  $\alpha_k \in (0, 1]$  takového, aby  $v^{(k+1)} \in \mathcal{N}(\gamma, \beta)$  a aby byla splněna Armijova podmínka:

$$\vartheta_{k+1} \leq (1 - \alpha_k \omega (1 - \sigma_k)) \vartheta_k.$$

(4°) Je-li  $err^{(k)} := \|v^{(k+1)} - v^{(k)}\| / \|v^{(k)}\| \leq \varepsilon$ , odešli  $v^{(k+1)} \approx v^*$ , jinak  $k := k + 1$  a jdi na (1°).

# Konvergence

- Krok  $\alpha_k$  splňující (3°) je odražený od nuly.

## Lemma

Nechť  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\beta \geq 1$ ,  $\omega \in (0, 1)$  a  $\hat{v} \in \mathcal{N}(\gamma, \beta)$ ,  $\hat{v} \neq v^*$ . Pak existuje  $\hat{\delta} > 0$  a  $\hat{\alpha} \in (0, 1]$  takové, že pro  $\alpha_k$  splňující (3°) platí  $\alpha_k \geq \hat{\alpha}$  pro libovolné  $v^{(k)} \in \mathcal{N}(\gamma, \beta) \cap \hat{\mathcal{B}}(\hat{v}, \hat{\delta})$ .

- Důkaz není konstruktivní, ve výpočtu se používá "backtracking".

## Věta

Nechť  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\beta \geq 1$ ,  $\omega \in (0, 1)$  a  $\varepsilon = 0$ . Nechť posloupnost  $\{v^{(k)}\}$  počítána ALGORITMEM PF je omezená. Limitní bod této posloupnosti je řešení  $v^*$ .

- Důkaz sporem:  $\exists \{v^{(k')}, k' \in \mathcal{I}\} \rightarrow \hat{v} \neq v^*$

$$0 < \hat{\vartheta} \leftarrow \vartheta_{k'+1} \leq \vartheta_{k'} - \alpha_{k'} \omega (1 - \sigma_{k'}) \vartheta_{k'} \leq \underbrace{\vartheta_{k'} - \frac{1}{2} \hat{\alpha} \omega \hat{\vartheta}}_{-\infty \leftarrow \vartheta_{k'+1} \leq}$$

- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav**
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)
- 6 Numerické experimenty

# Implementační detaily

- Adaptivní přesnot pro řešení vnitřních soustav PCGM:

$$tol^{(k)} := \min\{r_{tol} \times err^{(k-1)}, c_{fact} \times tol^{(k-1)}\},$$

kde  $0 < r_{tol}, c_{fact} < 1$ .

( $r_{tol} = 0.01, c_{fact} = 0.9$ )

- Adaptivní centrování pomocí bariérové strategie:  $\sigma_k \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $c_\sigma > 0$ ,

$$\sigma_k = \min\left\{\frac{1}{2}, \max\left\{0, c_\sigma \times \left(\frac{1-\xi_k}{\xi_k}\right)^3\right\}\right\}$$

kde

$$\xi_k = \min_{i \in \{1, \dots, 2m\}} \{v_i^{(k)} z_i^{(k)}\} / \vartheta_k.$$

Platí:  $\xi_k \in [\gamma, 1]$ .

Je-li  $\xi_k = 1$ ,  $v^{(k)} \in \mathcal{C}(\tau) \implies \sigma_k = 0$  ( $\approx$  newtonovský směr).

Je-li  $\xi_k = \gamma$ ,  $v^{(k)} \in \partial\mathcal{N}(\gamma, \beta) \implies \sigma_k = 1/2$  (centrující směr).

( $c_\sigma = 1.25 \times 10^{-5}$ )

# Implementační detaily

- výpočet délky kroku  $\alpha_k$  s tlumením a "backtrackingem":

$$\alpha_k^0 = \min\{1, -\delta v_{n+i}^{(k)} / \Delta v_{n+i}^{(k+1)} : \Delta v_{n+i}^{(k+1)} < 0, i = 1, \dots, 4m\},$$

"Backtrackingem" testujeme nerovnosti z  $\mathcal{N}(\gamma, \beta)$  a Armijovu podmínku,  $\text{podm}(\alpha)$ :

- Zvol  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\alpha_k^0 \in (0, 1]$  a  $j := 0$ .
- Pokud  $\text{podm}(\alpha_k^j)$  neplatí, polož  $\alpha_k^{j+1} = \rho \alpha_k^j$ ,  $j := j + 1$  a opakuj.
- Odešli  $\alpha_k = \alpha_k^j$ .

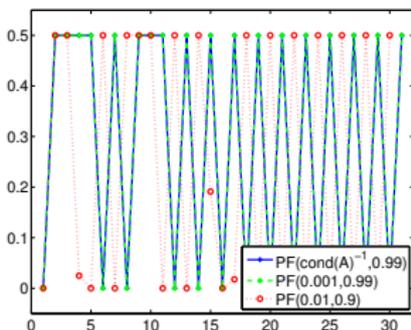
"Backtracking" musí skončit (viz Lemma).

$$(\delta = 0.999, \rho_1 = \rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.5)$$

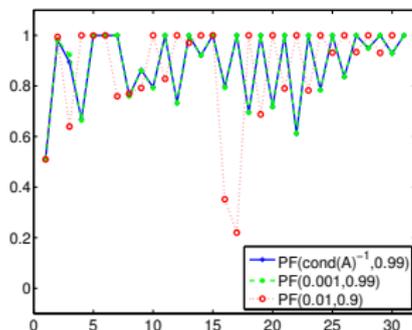
- zbývající parametry:  $\gamma = 0.001$ ,  $\beta = 10^9$ ,  $\omega = 0.1$ .

# Experiment: délka kroku $\alpha_k$ versus centrování $\sigma_k$

- jsme-li blízko centrální cesty, pak si můžeme dovolit dlouhý (newtonovský) krok:  $\alpha_k \approx 1$
- jsme-li blízko hranice okolí centrální cesty, pak centrujeme:  $\sigma_k = 1/2$



$\sigma_k$



$\alpha_k$

# Sestavení lineárních soustav

- Lagrangian:

$$L(x, \nu) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b + \sum_{i=1}^m \nu_{1,i}(l_i - x_{1,i}) + \sum_{i=1}^m \nu_{2,i}(x_{2,i}^2 + x_{3,i}^2 - g_i^2).$$

- Newtonova funkce  $F(v)$ :

$$F(v) = \begin{pmatrix} Ax - b + \begin{pmatrix} -N_1 \\ 2N_2 X_2 \\ 2N_2 X_3 \end{pmatrix} e_m \\ \begin{pmatrix} L - X_1 + Z_1 \\ X_2^2 + X_3^2 - G^2 + Z_2 \end{pmatrix} e_m \\ NZe_{2m} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \begin{cases} N_j = \text{diag}(\nu_j), j = 1, 2, \\ Z_j = \text{diag}(z_j), j = 1, 2, \\ X_j = \text{diag}(x_j), j = 1, 2, 3, \\ G = \text{diag}(g_1, \dots, g_m), \\ L = \text{diag}(l_1, \dots, l_m). \end{cases}$$

- Jacobiho matice je regulární na okolí centrální cesty:

$$J(v) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} J_{11} & J_{12} & 0 & & & \\ J_{21} & 0 & I & & & \\ 0 & Z & N & & & \end{array} \right),$$

$$J_{11} = A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2N_2 \end{pmatrix}, \quad J_{12} = J_{21}^T = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 2X_2 \\ 0 & 2X_3 \end{pmatrix}$$

# Schurův doplněk pro (2,2)-blok

$$\left( \begin{array}{c|cc} J_{11} & J_{21}^T & 0 \\ \hline J_{21} & 0 & I \\ 0 & Z & N \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \nu \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

- Schurův doplněk:  $J_{SC} = J_{11} - (J_{21}^T, 0) \begin{pmatrix} -Z^{-1}N & Z^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{21} \\ 0 \end{pmatrix}.$

- Redukovaná soustava:  $J_{SC} \Delta x = \tilde{r}_1,$

se symetrickou, pozitivně definitní, **ale špatně podmíněnou** maticí:

$$J_{SC} = J_{11} + J_{21}^T Z^{-1} N J_{21} = A + B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2N_2 \end{pmatrix} + J_{12} Z^{-1} N J_{12}^T,$$

kde  $B$  je symetrická, obecně pozitivně semidefinitní a "levná".

- Předpodmiňovač:

$$P_{SC} = D_A + B, \quad D_A = \text{diag}(A).$$

# Odhad polohy vlastních čísel

## Věta

Nechť  $0 < a_{\min}, a_{\max}$ , resp.  $0 < d_{\min}, d_{\max}$  jsou nejmenší a největší vl. číslo matice  $A$ , resp.  $D_A$ .

Vlastní čísla  $P_{SC}^{-1} J_{SC}$  leží v intervalu:

$$[a_{\min} d_{\max}^{-1}, a_{\max} d_{\min}^{-1}].$$

Důkaz: Úloha na vlastní čísla,  $\|x\| = 1$ :

$$(A + B)x = \lambda(D_A + B)x,$$

kde  $A, D_A$  jsou symetrické, definitní,  $B$  je symetrická, semidefinitní. Rayleighův podíl:

$$\lambda = \frac{x^T A x + x^T B x}{x^T D_A x + x^T B x} = \frac{a + \xi}{d + \xi} = 1 + \frac{a - d}{d + \xi} := \lambda(\xi; a, d).$$

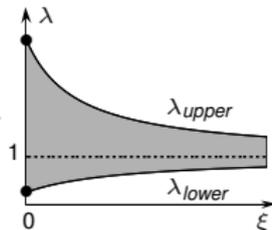
Poslední výraz chápeme jako hyperbolu s proměnou  $\xi$  a parametry  $a, d$ .

Protože  $a \in [a_{\min}, a_{\max}]$ ,  $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$  a  $a_{\min} \leq d_{\min} \leq d_{\max} \leq a_{\max}$ :

$$\lambda_{lower}(\xi) = \lambda(\xi; a_{\min}, d_{\max}), \quad \lambda_{upper}(\xi) = \lambda(\xi; a_{\max}, d_{\min}).$$

Pro libovolné vlastní číslo dostáváme:

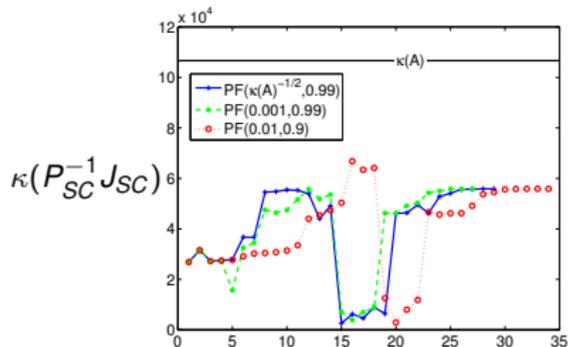
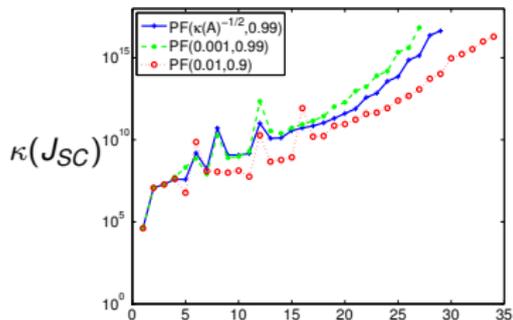
$$\lambda \in [\lambda_{lower}(0), \lambda_{upper}(0)].$$



- Hrubý odhad spektrálního čísla podmíněnosti:

$$\kappa(P_{SC}^{-1} J_{SC}) \leq \frac{a_{\max} d_{\min}^{-1}}{a_{\min} d_{\max}^{-1}} = \kappa(D_A) \times \kappa(A).$$

- **Odhady nezávisí na iteraci ALGORITMU PF, ale pouze na A.**
- Limitní Jacobiho matice  $J(v^*)$  může být singulární (např.  $\nu_{1,i}^* = z_{1,i}^* = 0$ , slabý kontakt).
- $\kappa(J_{SC}(v^{(k)})) \rightarrow \infty$  vlivem  $Z^{-1}$  (např.  $\nu_{1,i}^* > 0$  a  $z_{1,i}^* = 0$ ).
- Experiment: čísla podmíněnosti v jednotlivých iteracích:



- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)**
- 6 Numerické experimenty

# Formulace úlohy

- Minimalizační úloha s omezením:

$$x^* = \arg \min_{x \in \Omega} q(x),$$

kde

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b,$$

pro  $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \ll n$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq g, Cx = d\},$$

$g = (g_1, \dots, g_m)^T$ ,  $g_i \geq 0$ .

- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $p < n$ , má plnou řádkovou hodnotu,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická, pozitivně definitní na  $\text{Ker } C$ .
- Struktura ALGORITMU PF i teorie je stejná, jinak se řeší lineární soustavy.

# Sestavení lineárních soustav

- Lagrangian:

$$L(x, \mu, \nu) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b + \mu^T (C x - d) + \nu_1^T (-x_1 - g) + \nu_2^T (x_1 - g).$$

- Newtonova funkce:

$$F(\nu) = \begin{pmatrix} Ax - b + C^T \mu + \begin{pmatrix} -N_1 + N_2 \\ 0 \end{pmatrix} e_m \\ Cx - d \\ \begin{pmatrix} -X_1 - G + Z_1 \\ X_1 - G + Z_2 \end{pmatrix} e_m \\ NZ e_{2m} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \begin{cases} N_j = \text{diag}(\nu_j), j = 1, 2, \\ Z_j = \text{diag}(z_j), j = 1, 2, \\ X_1 = \text{diag}(x_j), \\ G = \text{diag}(g_1, \dots, g_m), \end{cases}$$

- Soustava s Jacobiho maticí:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} A & C^T & J_{13} & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ \hline J_{31} & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Z & N \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \\ \Delta \nu \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}, \quad J_{13} = J_{31}^T = \begin{pmatrix} -I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Schurův doplněk pro (2,2)-blok

- Eliminujeme  $\Delta\nu$  a  $\Delta z$ :

$$\begin{pmatrix} A+B & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \text{diag}(N_1 Z_1^{-1} + N_2 Z_2^{-1}, 0),$$

kde  $B$  je symetrická, pozitivně semidefinitní.

- Použijeme projektor:  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Ker } C$ ,  $P = I - C^T(CC^T)^{-1}C$ .
- Dostaneme projektovanou rovnici:

$$P(A+B)\Delta x = P\bar{r}_1, \quad \Delta x \in \text{Ker } C.$$

- Po výpočtu  $\Delta x$  dopočítáme ostatní složky Newtonova směru, např.:

$$\Delta \mu = (CC^T)^{-1}C(\bar{r}_1 - (A+B)\Delta x).$$

## Lemma

$P(A+B) : \text{Ker } C \rightarrow \text{Ker } C$  je symetrický, pozitivně definitní operátor (invertovatelný na  $\text{Ker } C$ ).

Důkaz:  $x \in \text{Ker } C$ ,  $x^T P(A+B)x = (Px)^T (A+B)(Px)$ . □

# Řešení projektované rovnice

- Předpokládá se potlačující růst  $Z^{-1}$ :

$$PD : Ker C \rightarrow Ker C, \quad D = D_A + B, \quad D_A = diag A.$$

Je symetrický, pozitivně definitní na  $Ker C$  (a invertovatelný).

- Předpokmíněná projektovaná rovnice:

$$[PD]^{-1} P(A + B)\Delta x = [PD]^{-1} P\tilde{r}_1, \quad \Delta x \in Ker C,$$

kde  $[PD]^{-1}$  je inverze na  $Ker C$  (standardní inverzní matice neexistuje).

# Akce $[PD]^{-1}$ na $\text{Ker } C$

## Lemma

Nechť  $D$  nemá nuly na diagonále. Pak platí:

$$[PD]^{-1} = P_{D^{-1}}D^{-1},$$

kde  $P_{D^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Ker } C$  je šikmý projector:

$$P_{D^{-1}} = I - D^{-1}C^T(CD^{-1}C^T)^{-1}C.$$

Důkaz:  $x, y \in \text{Ker } C$ . Pro  $x = [PD]^{-1}y$  analyzujeme inverzi  $PDx = y$  odpovídající soustavě:

$$\begin{pmatrix} D & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z první rovnice:  $x = D^{-1}(y - C^T\mu)$ . Z druhé:  $\mu = (CD^{-1}C^T)^{-1}CD^{-1}y$  a vyeliminujeme  $\mu$ :

$$x = D^{-1}(y - C^T(CD^{-1}C^T)^{-1}CD^{-1}y) = (I - D^{-1}C^T(CD^{-1}C^T)^{-1}C)D^{-1}y$$

# Předpodmíněné projektované CGM

$x = \text{PPCGM}(M, D, P, P_{D^{-1}}, \bar{r}_1, x_0, tol)$

- (1.)  $x = Px_0$  ort. projektor
- (2.)  $r = P(\bar{r}_1 - Mx)$  ort. projektor
- (3.)  $z = P_{D^{-1}}D^{-1}r$  předpodmínění
- (4.)  $p = z$
- (5.)  $\rho = r^T z$
- (6.) while  $\|r\|/\|\bar{r}_1\| > tol$
- (7.)  $w = Pmp$  ort. projektor
- (8.)  $\alpha = \rho/(p^T w)$
- (9.)  $x = x + \alpha p$
- (10.)  $r = r - \alpha w$
- (11.)  $z = P_{D^{-1}}D^{-1}r$  předpodmínění
- (12.)  $\rho_1 = \rho$
- (13.)  $\rho = r^T z$
- (14.)  $\beta = \rho/\rho_1$
- (15.)  $p = z + \beta p$
- (16.) endwhile

- $x = \Delta x$
- $M = A + B, D = D_A + B$
- projektovaná rovnice:

$$[PD]^{-1}PMx = [PD]^{-1}P\bar{r}_1, x \in \text{Ker } C$$

- ortogonální projektor:

$$P = I - C^T(CC^T)^{-1}C$$

- šikmý projektor:

$$P_{D^{-1}} = I - D^{-1}C^T(CD^{-1}C^T)^{-1}C$$

# Odhad polohy vlastních čísel na $\text{Ker } C$

## Věta

Nechť  $0 < a_{\min}, a_{\max}$ , resp.  $0 < d_{\min}, d_{\max}$  jsou nejmenší a největší vl. číslo  $A$ , resp.  $D_A$  na  $\text{Ker } C$ .

Vlastní čísla operátoru  $[P(D_A + B)]^{-1}P(A + B) : \text{Ker } C \rightarrow \text{Ker } C$  leží v intervalu:

$$[a_{\min} d_{\max}^{-1}, a_{\max} d_{\min}^{-1}]$$

Důkaz: Úloha na vlastní čísla,  $\|x\| = 1, x \in \text{Ker } C$ :

$$P(A + B)x = \lambda P(D_A + B)x,$$

Rayleighův podíl:

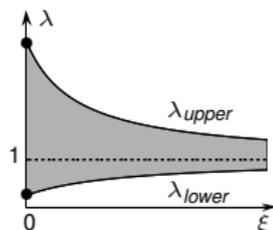
$$\lambda = \frac{x^T P(A + B)x}{x^T P(D_A + B)x} = \frac{x^T Ax + x^T Bx}{x^T D_A x + x^T Bx} = \dots$$

Dále je všechno stejné. Včetně důsledků:

- Odhad spektrálního čísla podmíněnosti na  $\text{Ker } C$ :

$$\kappa([PD]^{-1}PM, \text{Ker } C) \leq \kappa(D_A, \text{Ker } C) \times \kappa(A, \text{Ker } C).$$

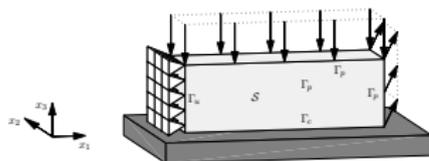
- Odhady nezávisí na iteraci ALGORITMU PF, ale pouze na  $A$  a  $C$ .



- 1 Kontaktní úlohy a úlohy se skluzem
- 2 Formulace 1. úlohy (QCQP)
- 3 Metoda sledování centrální cesty (Path-Following)
- 4 Implementační detaily a řešení lineárních soustav
- 5 Formulace a řešení 2. úlohy (s rovnostním omezením)
- 6 Numerické experimenty**

# Experiment 1: 3D kontaktní úloha s Trescovým třením

- lineární pružnost: těleso na tuhé podložce
- sférická omezení, pozitivně definitní případ

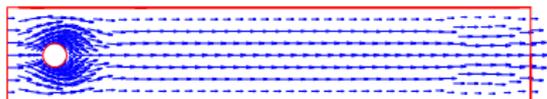


$m$	PF(0.3, 0.99)		PF(0.1, 0.9)		PF(0.01, 0.99)		AS	
	$iter/n_A$	$time$	$iter/n_A$	$time$	$iter/n_A$	$time$	$n_A$	$time$
180	15/87	0.28	14/92	0.28	14/119	0.36	187	0.48
378	13/85	1.61	13/96	1.78	12/105	1.89	181	2.70
648	15/91	6.43	14/104	7.11	15/130	8.47	187	10.14
990	17/120	23.20	15/116	22.17	17/166	29.72	203	30.64
1404	16/106	48.22	15/116	51.51	15/147	62.04	230	78.13
1890	17/121	111.18	16/125	113.40	16/151	131.90	254	177.31
2448	18/130	226.19	17/130	224.11	17/175	285.51	259	344.97

- ALGORITHMUS PF( $r_{tol}$ ,  $c_{fact}$ )
- AS: algoritmus založený na aktivních množinách
- $iter$ : počet vnějších (Newtonovských) iterací
- $n_A$ : počet násobení matice-vektor

# Experiment 2: 2D proudění se skluzovou podmínkou

- modelová úloha: obtékání překážky v kanálu
- Stokesův model nestlačitelné kapaliny
- jednoduchá omezení, pozitivně semi-definitní případ bez projektorů



$m$	$g = 10$		$g = 30$	
	AS	PF	AS	PF
30	<b>6867</b> (7.2)	<b>208</b> (0.6)	<b>682</b> (1.2)	<b>181</b> (0.2)
60	<b>22579</b> (118.6)	<b>283</b> (12.4)	<b>1060</b> (8.4)	<b>268</b> (1.2)
120	<b>130615</b> (4110.4)	<b>374</b> (12.4)	<b>1816</b> (59.2)	<b>389</b> (12.7)
240	<b>&gt;200000</b>	<b>459</b> (135.4)	<b>3083</b> (849.1)	<b>454</b> (130.7)

- ALGORITHMUS PF
- AS: algoritmus založený na aktivních množinách
- **tučně**: počet násobení matice-vektor

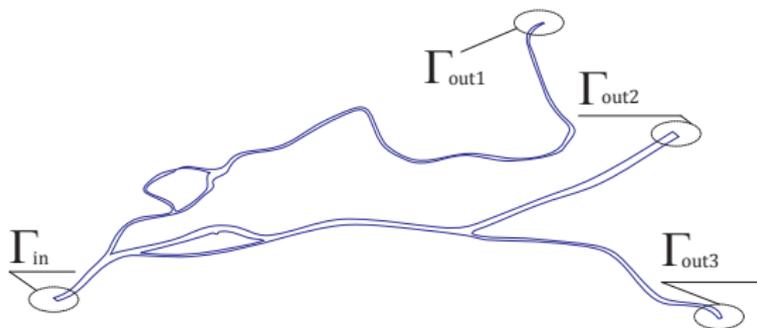
# Experiment 3: 2D proudění se skluz. podm. + TFETI

- modelová úloha: jednoduchá geometrie (čtverec dělený na čtverce)
- jednoduchá omezení, pozitivně definitní případ s projekty
- **tučně**: počet násobení matice-vektor

<i>počet podoblastí</i>	<i>primal/dual</i>	<b>-</b>	<b><math>I + B</math></b>	<b><math>D_A + B</math></b>
100(10 × 10)	24300/5099	<b>3847</b>	<b>1260</b>	<b>303</b>
144(12 × 12)	34992/7343	<b>4214</b>	<b>1257</b>	<b>302</b>
196(14 × 14)	47628/9995	<b>4139</b>	<b>1160</b>	<b>295</b>
256(16 × 16)	62208/13055	<b>4336</b>	<b>1132</b>	<b>295</b>
324(18 × 18)	78732/16523	<b>4349</b>	<b>1149</b>	<b>295</b>
400(20 × 20)	97200/20399	<b>4781</b>	<b>1147</b>	<b>294</b>
484(22 × 22)	117612/24683	<b>4959</b>	<b>1143</b>	<b>294</b>

# Experiment 4: rozvětvená oblast

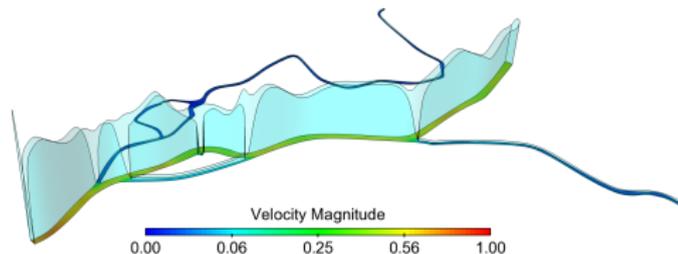
- geometrie  $\Omega$  na obrázku:  $\gamma_D = \Gamma_{in}$ ,  $\gamma_N = \Gamma_{out1} \cup \Gamma_{out2} \cup \Gamma_{out3}$ ,  $\gamma_S = \partial\Omega \setminus \overline{\gamma_D \cup \gamma_N}$
- $\nu = 1$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , parabolický vtok  $\mathbf{u}_D$ , volný výtok  $\sigma_N = \mathbf{0}$ ,  $\kappa = 0.3$



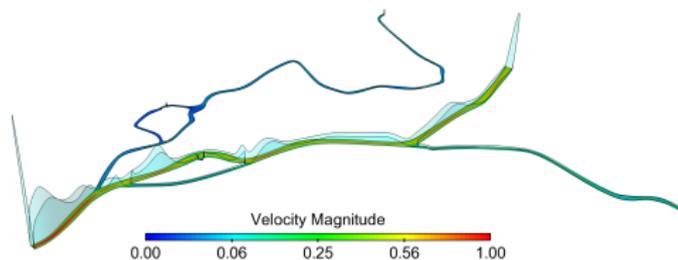
<i>primal/dual</i>	$g = 0.01$	$g = 0.05$	$g = 0.1$	$g = 0.15$	$g = 0.2$
164481/16240	<b>9068</b>	<b>9273</b>	<b>7763</b>	<b>7214</b>	<b>7445</b>
636498/32442	<b>8377</b>	<b>8277</b>	<b>8583</b>	<b>7219</b>	<b>6516</b>
1746822/54048	<b>7761</b>	<b>8936</b>	<b>7866</b>	<b>7261</b>	<b>6613</b>

# Experiment 4: tečná rychlost podél $\gamma_S$

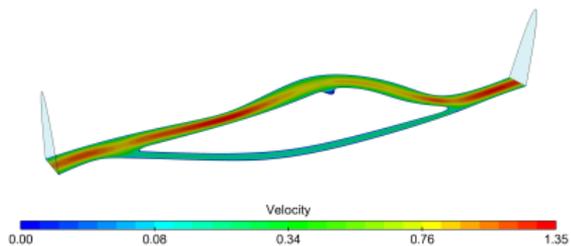
- pro  $g = 0.01$



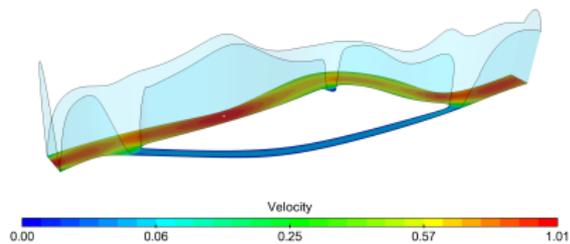
- pro  $g = 0.2$



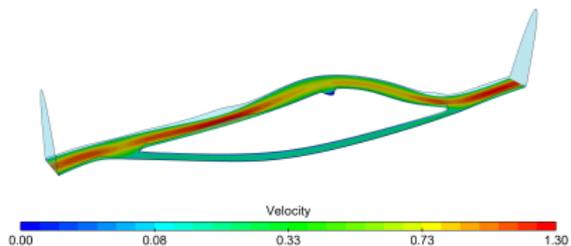
# Experiment 4: detail



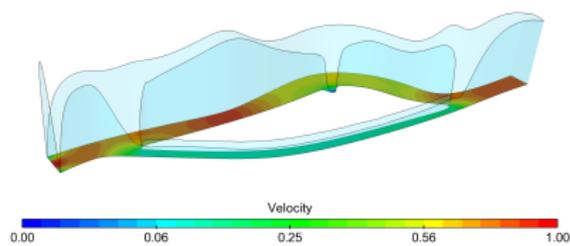
$g = 5$



$g = 0.05$



$g = 0.5$



$g = 0.005$

# Experiment 5: časová úloha



=====

UNSTEADY Dirichlet-Neumann-Slip STOKES EQUATION IN 2D (PF-IPM)

=====

L	t	CPU.t	pf/n_A	res1	res2	res2	A/ ~	res_ss
1	0.1	4.6e0	21/1051	5.1e-14	6.2e-6	3.3e-7	180/176/0	1.3e-4
2	0.2	6.9e0	17/1529	1.8e-15	4.8e-7	2.2e-8	198/158/0	2.4e-5
3	0.3	6.1e0	20/1430	1.0e-15	4.5e-7	1.9e-8	196/160/0	1.8e-5
4	0.4	5.3e0	20/1360	8.6e-16	7.4e-7	2.9e-8	188/168/0	3.6e-5
5	0.5	6.6e0	21/1416	8.0e-16	3.9e-7	1.7e-8	180/176/0	2.3e-5
6	0.6	7.4e0	25/1626	7.7e-16	1.2e-7	5.8e-9	168/188/0	7.5e-6
7	0.7	6.5e0	24/1243	7.9e-16	6.7e-7	2.8e-8	158/198/0	4.9e-5
8	0.8	5.9e0	25/1283	7.5e-16	8.0e-7	3.2e-8	148/208/0	5.0e-5
9	0.9	4.1e0	22/1025	7.4e-16	1.2e-7	4.3e-9	133/223/0	7.8e-6
10	1.0	5.6e0	23/1261	7.3e-16	9.9e-8	3.7e-9	103/253/0	6.5e-6

=====

- [1] KR, Machalová J., Netuka H., Ženčák P.: *An interior point algorithm for the minimization arising from 3D contact problems with friction*. Optimization Methods and Software, 28:6(2013), 1195–1217.
- [2] Brzobohatý T., Jarošová M., KR, Šátek V.: *Path-following interior point method: theory and applications for the Stokes flow with a stick-slip boundary condition*. Adv. Eng. Softw., 129(2019), 35–43.
- [3] Nocedal J., Wright S. J.: *Numerical optimization*. Springer, New York 2006.
- [4] Wright S. J.: *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM, Philadelphia 1997.
- [5] Wright S. J., Ralph D.: *A superlinear infeasible-interior-point algorithms for monotone complementarity problems*. Mathematics of operations research, 21(1996), 815-838.
- [6] Nocedal J., Wächter A., Waltz R. A.: *Adaptive barrier strategies for nonlinear interior methods*. TR RC 23563. IBM T. J. Watson Research Center, 2005.
- [7] KR, Haslinger J., Šátek V., Jarošová M.: *Efficient methods for solving the Stokes problem with slip boundary conditions*. Math. Computers Simulat., 145(2018), 114-124.
- [8] KR, Šátek, V., Haslinger, J., Fialová, S., Pochylý. F.: *Modeling of hydrophobic surfaces by the Stokes problem with the stick–slip boundary conditions*. ASME JFE, 2017; 139(1).
- [9] Djoko, J., Koko, J., KR: *Power law Stokes equations with threshold slip boundary conditions: Numerical methods and implementation*. MMAS, 42(2019), pp. 1488-1511.
- [10] Haslinger, J., KR, Sassi, T., Šátek, V: *Dual strategies for solving the Stokes problem with stick-slip boundary conditions in 3D*. MCS, 189(2021), 191-206.
- [11] Haslinger, J., KR, Motyčková, K., Šátek, V: *Stokes problem with the Coulomb stick–slip boundary conditions in 3D: Formulations, approximation, algorithms, and experiments*. Mathematics and Computers in Simulation, 216(2024), pp. 145-167.

Děkuji za pozornost!